

# SOLUCIÓN APUNTE MA1002

## CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

### SEMANA 10

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas  
Use este material con responsabilidad.

**Nota:** La longitud de la curva  $f(x)$  entre 0 y  $x$  está dada por:

$$L_0^x(f) = \int_0^x \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

La longitud de una curva parametrizada por  $\vec{r}(t)$  entre  $a$  y  $b$  corresponde a (contenido de Semana 11):

$$L_a^b = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| dt$$

Recuerde que los momentos estáticos  $M_{OX}$  y  $M_{OY}$  respecto a los ejes  $OX$  y  $OY$  respectivamente de una región de masa  $m$  encerrada bajo el gráfico de una función  $f(x)$  entre  $x = a$  y  $x = b$  corresponden a:

$$\begin{aligned} M_{OY} &= Y_G \cdot m \\ M_{OX} &= X_G \cdot m \end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned} X_G &= \frac{1}{2\pi} \frac{V_{OY}(f)_a^b}{A_a^b(f)} \\ Y_G &= \frac{1}{2\pi} \frac{V_{OX}(f)_a^b}{A_a^b(f)} \end{aligned}$$

corresponden a las coordenadas del Centro de Gravedad.

**P1.**

a) Sabemos por enunciado que:

$$\begin{aligned} L_0^x(f) &= x^2 + 2x - f(x) \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} L_0^x(f) &= 2x + 2 - f'(x) \end{aligned}$$

Por otra parte, derivando la fórmula para la longitud de la curva obtenemos, usando el TFC:

$$\frac{d}{dx} L_0^x(f) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

Por lo que igualando obtenemos:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+f'(x)^2} &= 2x+2-f'(x) & / \quad ( )^2 \\ 1+f'(x)^2 &= (4x^2+8x+4) - 2(2x+2)f'(x) + f'(x)^2 \\ f'(x) &= \frac{4x^2+8x+3}{4(x+1)} & / \quad \int ( ) dx \\ f(x) &= \int \frac{4x^2+8x+3}{4(x+1)} dx\end{aligned}$$

Calculemos esta primitiva:

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2+8x+3}{4(x+1)} dx &= \int \frac{4(x+1)^2-1}{4(x+1)} dx = \int \left( x+1 - \frac{1}{4(x+1)} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{4}\ln(x+1) + c\end{aligned}$$

Luego  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{4}\ln(x+1) + c$ , pero  $f(0) = 0$  por lo que evaluando podemos encontrar el valor de la constante  $c$ .

$$f(0) = \frac{1}{2}0^2 + 0 - \frac{1}{4}\ln(0+1) + c = c = 0 \Rightarrow c = 0$$

Con lo que:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{4}\ln(x+1) = \frac{1}{2}x(x+2) - \frac{1}{4}\ln(x+1)$$

b) Área bajo la curva:

$$\begin{aligned}A &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{4}\ln(x+1) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x dx - \frac{1}{4} \int_0^1 \ln(x+1) dx \\ &= \left( \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}((x+1)\ln(x+1) - (x+1)) \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{11 - 6\ln(2)}{12}\end{aligned}$$

Longitud entre 0 y 1: Por enunciado, la longitud entre 0 y  $x$  es  $x^2 + 2x - f(x)$ . Luego basta calcular haciendo  $x = 1$ .

$$L_0^1(f) = 1 + 2 - f(1) = 3 - \left( \frac{1}{2}1^2 + 1 - \frac{1}{4}\ln(1+1) \right) = \frac{6 + \ln(2)}{4}$$

**P2.** Recuerde que se tiene, para una parametrización  $\vec{r}(t)$ :

$$L_a^b = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| dt$$

a) Tenemos que nuestra parametrización es:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} \cos(t) \\ e^{2t} \sin(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = 2e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 2\cos(t) - \sin(t) \\ 2\sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}$$

Y calculando su norma:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| &= e^{2t} \sqrt{(2\cos(t) - \sin(t))^2 + (2\sin(t) + \cos(t))^2} \\ &= e^{2t} \sqrt{5(\sin^2(t) + \cos^2(t))} = e^{2t} \sqrt{5} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$L_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} e^{2t} \sqrt{5} dt = \frac{e^{2t} \sqrt{5}}{2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{5}}{2} (e^{4\pi} - 1)$$

b)

$$L_0^{t_0} = \int_0^{t_0} e^{2t} \sqrt{5} dt = \frac{e^{2t} \sqrt{5}}{2} \Big|_0^{t_0} = \frac{\sqrt{5}}{2} (e^{2t_0} - 1)$$

Necesitamos que  $2L_0^{t_0} = L_0^{2\pi}$ . Esto es lo mismo que pedir:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\sqrt{5}}{2} (e^{2t_0} - 1) &= \frac{\sqrt{5}}{2} (e^{4\pi} - 1) \\ 2e^{2t_0} - 2 &= e^{4\pi} - 1 \\ e^{t_0} &= \sqrt{\frac{e^{4\pi} + 1}{2}} \\ t_0 &= \ln \sqrt{\frac{e^{4\pi} + 1}{2}} \end{aligned}$$

**P3.** Despejando para el primer cuadrante obtenemos:

$$y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$$

Con lo que:

$$y' = \frac{3}{2}(a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2} \cdot \left( \frac{-2}{3}x^{-1/3} \right) = -x^{-1/3}(a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2}$$

$$1 + (y')^2 = 1 + x^{-2/3}(a^{2/3} - x^{2/3}) = 1 + \frac{a^{2/3}}{x^{2/3}} - 1 = \left( \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}} \right)^2$$

En el primer cuadrante ( $x \geq 0$ ), la curva corta al eje  $OX$  en  $x = a$  (se despeja haciendo  $y = 0$ ), y corta al eje  $OY$  en  $y = a$  (se despeja haciendo  $x = 0$ ). Lo importante de este resultado es que la curva cuya longitud nos piden calcular va desde el punto  $(0, a)$  hasta el punto  $(a, 0)$ . Luego la integral de la longitud se calcula desde 0 hasta  $a$ , es decir:

$$L_0^a(C) = \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^a \sqrt{\left( \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}} \right)^2} dx = \int_0^a \left| \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}} \right| dx$$

Pero como  $a, x > 0$ , tenemos finalmente que:

$$L_0^a(C) = \int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}} dx = a^{1/3} \int_0^a \frac{dx}{x^{1/3}}$$

**P4.** Para el largo de la elipse, debido a su simetría, consideraremos el doble del largo de la curva sobre el eje  $OX$ , de ecuación  $y = \sqrt{2}\sqrt{1-x^2}$ . Donde:

$$y' = \frac{-x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} \quad 1 + (y')^2 = \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

Por lo tanto la longitud de la elipse está dada por:

$$E = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} dx$$

Análogamente, por su simetría, para el largo de la senoide consideraremos el doble del largo de la curva sobre el eje  $OX$ , esto es, entre 0 y  $\pi$ . Además:

$$y' = \cos(x) \quad 1 + (y')^2 = 1 + \cos^2(x)$$

Por lo tanto la longitud de la senoide está dada por:

$$S = 2 \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2(x)} dx, \quad u = \cos(x) \rightarrow du = -\sin(x)dx = -\sqrt{1-u^2}dx$$

$$= -2 \int_1^{-1} \frac{\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{1-u^2}} du = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+u^2}{1-u^2}} du$$

Por lo que  $E = S$ .