

SOLUCIÓN APUNTE MA1002

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

SEMANA 8

Autor: Nicolás Igor Tapia Rivas
Use este material con responsabilidad.

Observación: Antes del desarrollo probaremos un resultado muy útil. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y u, v funciones derivables. Definimos:

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \quad [\text{Notar que el integrando no depende de } x]$$

Entonces aseguramos que se cumple:

$$G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$$

Demostración:

Definamos $H(x) = \int_a^x f(t) dt$. Tenemos por TFC que $H'(x) = f(x)$. Luego:

$$G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = \int_c^{v(x)} f(t) dt + \int_{u(x)}^c f(t) dt = \int_c^{v(x)} f(t) dt - \int_c^{u(x)} f(t) dt = H(v(x)) - H(u(x))$$

$$G'(x) = [H(v(x)) - H(u(x))]' = v'(x)H'(v(x)) - u'(x)H'(u(x)) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$$

Que era lo que se quería probar.

E1. Sea $G(a) = \int_a^{a+p} f(t) dt$. Lo que nos piden es equivalente a probar que $G(a)$ no depende del valor de a . Esto es lo mismo que $G'(a)$ sea cero. En efecto, notemos que:

$$G'(a) = (a+p)'f(a+p) - a'f(a) = f(a+p) - f(a) = 0$$

Lo último puesto que $f(a+p) = f(a)$. Luego $G(a)$ es constante para todo valor de a . En particular podemos evaluar en $a = 0$ y obtener que $G(a) = G(0)$, $\forall a \in \mathbb{R}$, con lo que se tiene lo pedido.

E2.

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x)dx &= \int_0^a f(x)dx + \int_{-a}^0 f(x)dx, \quad u = -x \rightarrow du = -dx \\ &= \int_0^a f(x)dx - \int_a^0 f(-u)du = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(-u)du\end{aligned}$$

En resumen, y recordando que las variables del integrando son mudas:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a (f(x) + f(-x))dx$$

Caso par: En este caso $f(-x) = f(x)$ y por lo tanto:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

Caso impar: En este caso $f(-x) = -f(x)$ y por lo tanto:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

Nota: Hay que darse cuenta de que las variables son mudas en el integrando. En nuestro caso, lo esencial es que se integra desde 0 hasta a , sin diferenciar si se escribió $f(x)dx$ o $f(u)du$, ya que las variables se mueven a través del mismo intervalo de integración y por ende solo son etiquetas.

E3. Si $a = b$ el problema no tiene sentido, puesto que el dato de que $\int_a^b f(x)dx = 0$ no aporta ninguna información. Supongamos entonces que $a \neq b$. Como f es continua en $[a, b]$, por el TVM para integrales tenemos que $\exists \xi \in (a, b)$ tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a)$$

Pero ya que $\int_a^b f(x)dx = 0$, tenemos que $f(\xi)(b - a) = 0 \Rightarrow f(\xi) = 0$. Luego basta tomar $c = \xi$ y se tiene lo pedido.

E4.

$$\begin{aligned}& \int_a^b \left(\int_a^b f(x)g(y)dy \right) dx, \quad f(x) \text{ es constante en la integral interior} \\ &= \int_a^b f(x) \left(\int_a^b g(y)dy \right) dx, \quad \int_a^b g(y)dy \text{ es constante en la integral exterior} \\ &= \left(\int_a^b g(y)dy \right) \left(\int_a^b f(x)dx \right).\end{aligned}$$

E5.

$$F(x) = \int_0^x x f(t) dt = x \int_0^x f(t) dt \Rightarrow F'(x) = x' \int_0^x f(t) dt + x \left(\int_0^x f(t) dt \right)'$$

Y por el TFC se tiene finalmente:

$$F'(x) = x f(x) + \int_0^x f(t) dt.$$

E6.

$$G(x) = \int_0^x \left(\int_0^u f(t) dt \right) du$$

Gracias a que f es continua, podemos usar el TFC para afirmar que $(\int_0^u f(t) dt)' = f(u)$. Luego, integrando por partes $G(x)$ tenemos:

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x \left(\int_0^u f(t) dt \right) du \quad ; \left(\begin{array}{l} p = \int_0^u f(t) dt \rightarrow dp = f(u) du \\ dq = du \rightarrow q = u \end{array} \right) \\ &= u \int_0^u f(t) dt \Big|_0^x - \int_0^x u f(u) du = \int_0^x x f(t) dt - \int_0^x u f(u) du \end{aligned}$$

Recordando que no hay distinción entre u y t tenemos:

$$G(x) = \int_0^x x f(u) du - \int_0^x u f(u) du = \int_0^x f(u)(x - u) du.$$

E7. En otras palabras, buscamos $x \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^x f + \int_x^b f = \int_a^x f + \int_a^x f \Leftrightarrow \int_a^b f = 2 \int_a^x f \Leftrightarrow \int_a^b f - 2 \int_a^x f = 0$$

Definiendo $H(x) = \int_a^b f - 2 \int_a^x f$, buscamos $x \in [a, b]$ tal que $H(x) = 0$. Notemos que $H(x)$ es continua puesto que, como f es integrable, la función $\int_a^x f$ es continua. Además:

$$H(a) = \int_a^b f \quad \text{y} \quad H(b) = - \int_a^b f$$

Luego:

$$H(a)H(b) \leq 0 \Rightarrow^{TVI} \exists x \in [a, b] : H(x) = 0.$$

Que es lo que se quería probar.

E8. Es aplicación directa de la observación inicial. Recuerde que para que la propiedad demostrada en la observación sea válida, la función que se está integrando no debe depender de la variable de la función global (en este caso x).

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad f(x) &= \int_1^{x^2} \sin(t^4) dt \Rightarrow f'(x) = 2x \sin(x^8) \\
 \text{(b)} \quad f(x) &= \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \frac{t^2}{1+t^6} dt \Rightarrow f'(x) = \frac{2x^5}{1+x^{12}} - \frac{\sqrt{x}}{2(1+x^3)} \\
 \text{(c)} \quad f(x) &= \int_{x^3}^{\cos(x)} (x-t) \sin(t^2) dt = x \int_{x^3}^{\cos(x)} \sin(t^2) dt - \int_{x^3}^{\cos(x)} t \sin(t^2) dt \\
 &\Rightarrow f'(x) = \sin(x) \sin(\cos(x^2))(\cos(x) - x) + 3x^2 \sin(x^6)(x^3 - x) + \int_{x^3}^{\cos(x)} \sin(t^2) dt.
 \end{aligned}$$

E9. Me parece que el ejercicio debería pedir *Muestre que* $f'''(x) = 2f(x)$. Si es así, entonces procedemos a derivar por TFC.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt = x^2 \int_0^x f(t) dt - 2x \int_0^x t f(t) dt + \int_0^x t^2 f(t) dt \\
 f'(x) &= 2x \int_0^x f(t) dt + x^2 f(x) - 2 \int_0^x t f(t) dt - 2x^2 f(x) + x^2 f(x) = 2x \int_0^x f(t) dt - 2 \int_0^x t f(t) dt \\
 f''(x) &= 2 \int_0^x f(t) dt + 2x f(x) - 2x f(x) = 2 \int_0^x f(t) dt \\
 f'''(x) &= 2f(x)
 \end{aligned}$$

P1.

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$$

$$\Rightarrow g'(x) = \underbrace{f(x)}_{\text{TFC}} + \underbrace{f'(x)f^{-1}(f(x))}_{\text{Observación inicial}} = f(x) + xf'(x)$$

Como $(xf(x))' = f(x) + xf'(x)$, se tiene por propiedad de primitivas que $g(x) - xf(x) = c$, con c una constante real. Luego $g(x) = xf(x) + c$. Evaluando en $x = 0$ tenemos $g(0) = c$, pero sabemos que:

$$g(0) = c = \int_0^0 f(t)dt + \int_0^{f(0)} f^{-1}(t)dt = \int_0^{f(0)} f^{-1}(t)dt$$

Solo nos basta saber cuánto vale $f(0)$. El enunciado nos dice que

$$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty); \quad \text{biyectiva y derivable (y por ende continua) en } (0, \infty)$$

Ello basta para conocer el valor de $f(0)$.

Que f sea biyectiva (particularmente inyectiva) y continua nos dice que f es estrictamente monótona. Una demostración formal podría ser (*), que se muestra más abajo. Pero usemos ideas más intuitivas para entender. Si la función creciera (o decreciera) en un momento y luego se "devolviera", y todo en una línea continua, claramente la función tendrá que repetir valores en su camino de vuelta, lo que contradice la inyectividad.

Dicho esto, y suponiendo que $f(0) \neq 0$, si f siempre creciera entonces nunca podrá tomar el valor 0. En cambio, si siempre decreciera, nunca podrá tomar los valores mayores a $f(0)$. Ambos casos contradicen la sobreyectividad de f en $[0, \infty)$. Luego necesariamente $f(0) = 0$. Usando esto concluimos que

$$c = \int_0^{f(0)} f^{-1}(t)dt = \int_0^0 f^{-1}(t)dt = 0 \Rightarrow g(x) = xf(x)$$

.

(*) Veamos primero que en un intervalo $[a, b]$, $a < b$, no puede ocurrir que exista una monotonía local **no estricta**. En efecto,

$$f(x_1) \leq f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \vee \underbrace{f(x_1) = f(x_2)}_{\text{Inyectividad!}}$$

Ahora, supongamos que tenemos un intervalo $[a, b]$, $a < b$ en donde f cambia su crecimiento en algún $x = p$, $p \in (a, b)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que primero crece y luego decrece estrictamente. Es decir:

$$f(a) < f(p) \wedge f(b) < f(p)$$

Tomando $\lambda = \max\{f(a), f(b)\}$, es claro que

$$f(a) \leq \lambda < f(p) \wedge f(b) \leq \lambda < f(p)$$

Luego, por TVI en $[a, p]$ y $(p, b]$ tenemos que $\exists \bar{x}_1 \in [a, p) \wedge \bar{x}_2 \in (p, b]$ tales que:

$$f(\bar{x}_1) = \lambda \wedge f(\bar{x}_2) = \lambda$$

Puesto que es claro que $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ (ya que $[a, p) \cap (p, b] = \emptyset$), tenemos que la inyectividad de f se contradice, por lo que f nunca cambia de crecimiento.

P2.

a)

$$g(x) = \int_0^x \frac{\arctan(t)}{t} dt, \text{ con } g'(x) = \frac{\arctan(x)}{x} \text{ por TFC.}$$

Integrando por partes tenemos:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 g(x) dx \quad ; \left[\begin{array}{l} p = g(x) \rightarrow dp = \frac{\arctan(x)}{x} dx \\ dq = dx \rightarrow q = x \end{array} \right] \\ &= xg(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \arctan x dx = g(1) - \int_0^1 \arctan x dx \end{aligned}$$

Recuerde que en este caso no hay importancia si se etiqueta la integral con x o con t .

b) Hay que calcular $\int_0^1 \arctan x dx$. Para ello integremos por partes:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \arctan(x) dx \quad ; \left[\begin{array}{l} p = \arctan(x) \rightarrow dp = \frac{dx}{1+x^2} \\ dq = dx \rightarrow q = x \end{array} \right] \\ &= x \arctan(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} \\ &= x \arctan(x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_0^1 \\ &= \arctan(1) - \frac{1}{2} \ln(2) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2) \end{aligned}$$

Con lo que se tiene:

$$\int_0^1 g(x) dx = g(1) - \int_0^1 \arctan x dx = g(1) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(2)$$

P3.

$$g(x) = f(x) + \int_0^{g(x)} f^2(g^{-1}(x)) dx \quad (1)$$

a) Para esta parte, demostraremos mejor que $\tanh^{-1}(f(x)) = g(x)$, puesto que la derivada de $\tanh^{-1}(x)$ no contiene funciones hiperbólicas (en cambio, la de $\tanh(x)$ sí). En efecto, recuerde primero que:

$$(\cosh(x))' = \sinh(x) \wedge (\sinh(x))' = \cosh(x)$$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \Rightarrow 1 - \tanh^2(x) = \cosh^{-2}(x)$$

Ambas igualdades que se obtienen simplemente con la definición del coseno y seno hiperbólico. Veamos ahora que las derivadas mencionadas valen:

$$\begin{aligned} (\tanh(x))' &= \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right)' = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \cosh^{-2}(x) \\ (\tanh^{-1}(x))' &= \frac{1}{\tanh'(\tanh^{-1}(x))} = \frac{1}{\cosh^{-2}(\tanh^{-1}(x))} = \frac{1}{1 - \tanh^2(\tanh^{-1}(x))} = \frac{1}{1 - x^2} \end{aligned}$$

Como $g(x)$ es biyectiva y continua, es estrictamente monótona (demostrado en [P1]). Luego $g^{-1}(x)$ es continua por propiedad del apunte acerca de la continuidad de las funciones inversas. Como $f(x)$ es diferenciable, se tiene que es continua y $f^2(g^{-1}(x))$, por ser composición de funciones continuas, es continua. Luego podemos usar el TFC para derivar $g'(x)$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= g'(x)f^2(g^{-1}(g(x))) + f'(x) = g'(x)f^2(x) + f'(x) \\ \Rightarrow g'(x) &= \frac{f'(x)}{1 - f^2(x)} \end{aligned}$$

Veamos por otra parte que:

$$(\tanh^{-1}(f(x)))' = \frac{f'(x)}{1 - f^2(x)}$$

Luego $g(x)$ y $\tanh^{-1}(f(x))$ son primitivas de la misma función y por ende difieren en $c \in \mathbb{R}$. Es decir $g(x) - \tanh^{-1}(f(x)) = c$. Evaluaremos en $x = 0$ esta igualdad puesto que es el único punto en que tenemos información. Sabemos que $g(0) = 0$. Pero además:

$$g(0) = f(0) + \int_0^{g(0)} f^2(g^{-1}(x))dx = f(0) + 0 = f(0)$$

Por lo que se tiene que $f(0) = 0$ también.

Luego evaluando en $x = 0$ tenemos que $c = g(0) - \tanh^{-1}(f(0)) = 0 - \tanh^{-1}(0) = 0$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \tanh^{-1}(f(x)) &= g(x) & / \quad \tanh() \\ \Rightarrow f(x) &= \tanh(g(x)) \end{aligned}$$

- b) Usando la indicación tenemos que $\tanh^2(t) = f^2(g^{-1}(t))$. Notemos entonces que si $g(x) = x^3$, podríamos usar que:

$$\int_0^{x^3} \tanh^2(t)dt = \int_0^{g(x)} f^2(g^{-1}(t))dt$$

Y despejarla de la igualdad (1). Lo único que nos pide $g(x)$ es que vaya de \mathbb{R} en \mathbb{R} , sea biyectiva, diferenciable y tal que $g(0) = 0$. Es fácil ver que x^3 cumple todas esas condiciones. Luego podemos hacer $g(x) = x^3$ y al despejar la integral en (1) tendremos:

$$\int_0^{x^3} \tanh^2(t)dt = g(x) - f(x) = g(x) - \tanh(g(x)) = x^3 - \tanh(x^3)$$

P4.

$$f(x) := \int_0^x x \ln(tx) dt, \text{ definida en } (0, \infty)$$

a)

$$\begin{aligned} \int \ln(t) dt & \quad ; \left[\begin{array}{l} u = \ln(t) \rightarrow du = \frac{dt}{t} \\ dv = dt \rightarrow v = t \end{array} \right] \\ = t \ln(t) - \int dt & = t \ln(t) - t + c \quad , \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} f(2) &= \int_1^2 2 \ln(2t) dt \quad ; w = 2t \rightarrow dw = 2dt \\ f(2) &= \int_2^4 \ln(w) dw = (w \ln(w) - w) \Big|_2^4 = 4 \ln(4) - 4 - 2 \ln(2) + 2 \\ f(2) &= 6 \ln(2) - 2 \end{aligned}$$

b) Notemos que no podemos usar el TFC directamente para derivar $f(x)$ puesto que tenemos $\ln(tx)dt$ en el integrando (depende de x). Haciendo $u = tx \rightarrow du = xdt$, tenemos:

$$f(x) = \int_1^x x \ln(tx) dt = \int_x^{x^2} \ln(u) du$$

Luego podemos derivar (mediante la **observación inicial**) para obtener:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)' \ln(x^2) - x' \ln(x) \\ &= 2x \ln(x^2) - \ln(x) \\ &= 4x \ln(x) - \ln(x) = (4x - 1) \ln(x) \end{aligned}$$

P5. Con $g(t) = \arcsen(\arctan(t))$ continua en $[0, \tan(1)]$, tenemos claramente que es continua en cada intervalo $[0, \tan(x)]$ con $x \in [0, 1]$. Luego, podemos estar tranquilos al utilizar la observación inicial para derivar $f(x)$.

$$f'(x) = \left(\int_0^{\tan(x)} g(t) dt \right)' = \tan'(x) g(\tan(x)) - 0' g(0) = \sec^2(x) g(\tan(x)) = \sec^2(x) \arcsen(x)$$

P6. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada e integrable. $f(a + b - x) = f(x)$

a)

$$\begin{aligned}
 & \int_a^b x f(x) dx \quad ; u = a + b - x \rightarrow du = -dx \\
 = & - \int_b^a (a + b - u) f(a + b - u) du = \int_a^b (a + b - u) f(u) du \\
 = & (a + b) \int_a^b f(u) du - \underbrace{\int_a^b u f(u) du}_{\text{La misma del inicio}} \\
 \Rightarrow & 2 \int_a^b x f(x) dx = (a + b) \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \int_a^b x f(x) dx = \frac{a + b}{2} \int_a^b f(x) dx
 \end{aligned}$$

b) Se debe notar que lo que se pide es calcado de lo demostrado anteriormente si usáramos $g(\sin(x))$ en lugar de $f(x)$ y el intervalo $[0, \pi]$ en lugar de $[a, b]$. Veamos si podemos hacer esto.

Como g es continua en $[-1, 1]$, al igual que $\sin(x)$, $g(\sin(x))$ también lo es. Además esta función está bien definida en todo \mathbb{R} puesto que $\sin(x)$ solo da valores en $[-1, 1]$. Luego consideremos el intervalo cerrado $[0, \pi]$, en donde $g(\sin(x))$ por ser continua es acotada e integrable. Notemos además que:

$$g(\sin(0 + \pi - x)) = g(\sin(x))$$

Como $g(\sin(x))$ cumple todas las gracias de $f(x)$, basta considerar la integral como un caso particular de lo visto en (a) con $f(x) = g(\sin(x))$, $a = 0$, $b = \pi$.

c) Para poder usar la parte (b), necesitamos encontrar $g(x)$ tal que:

$$xg(\sin(x)) = \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} = x \frac{\sin(x)}{2 - \sin^2(x)}$$

Es directo definir $g(x) = \frac{x}{2 - x^2}$, que cumple con ser continua en $[-1, 1]$. Luego tenemos:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = \int_0^\pi xg(\sin(x)) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi g(\sin(x)) dx \\
 = & \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx \quad ; u = \cos(x) \rightarrow du = -\sin(x) dx \\
 = & \frac{-\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{1}{1 + u^2} du = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + u^2} du
 \end{aligned}$$

Esta última integral es bien conocida y vale:

$$\frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} \arctan(x) \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi^2}{4}$$