MA1001-1 Introducción al Cálculo, Semestre Primavera
Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliar: Nicolás Tapia Rivas

Pendientes Auxiliar Examen

27 de Noviembre de 2014

P2. Calcule los siguientes límites:

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6^x - 2^x}{\operatorname{sen}(x)}$

Solución:

e) Notemos en primer lugar que $e^x - e^{-x} \to 1 - 1 = 0$ y que $\operatorname{sen}(x)\cos(x) \to 0 \cdot 1 = 0$ cuando $x \to 0$, por lo que tenemos una indefinición 0/0 y podemos aplicar l'Hôpital. De modo que al derivar tenemos:

$$\begin{aligned} (e^x - e^{-x})' &= e^x - e^{-x} \cdot (-x)' = e^x + e^{-x} \\ (\operatorname{sen}(x)\cos(x))' &= (\operatorname{sen}(x))'\cos(x) + \operatorname{sen}(x)(\cos(x))' = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) \end{aligned}$$

Y ocupando esto en el límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)} \xrightarrow{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)}$$

Donde $e^x + e^{-x} \to 1 + 1 = 2$ y $\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) \to 1^2 - 0^2 = 1$, observando que la indefinición ha desaparecido. Así, simplemente reemplazamos para obtener:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)} = \frac{2}{1} = 2$$

f) Nuevamente, notemos en primer lugar que $6^x - 2^x \to 1 - 1 = 0$ y que $\operatorname{sen}(x) \to 0$ cuando $x \to 0$, por lo que tenemos una indefinición 0/0 y podemos aplicar l'Hôpital. De modo que al derivar tenemos:

$$\begin{aligned} (6^x - 2^x)' &= (e^{x\ln(6)} - e^{x\ln(2)})' = e^{x\ln(6)}(x\ln(6))' - e^{x\ln(2)}(x\ln(2))' \\ &= e^{x\ln(6)}\ln(6) - e^{x\ln(2)}\ln(2) = 6^x\ln(6) - 2^x\ln(2) \\ (\operatorname{sen}(x))' &= \cos(x) \end{aligned}$$

Y ocupando esto en el límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{6^x - 2^x}{\operatorname{sen}(x)} \xrightarrow{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{6^x\ln(6) - 2^x\ln(2)}{\cos(x)}$$

Donde $6^x\ln(6) - 2^x\ln(2) \to 1 \cdot \ln(6) - 1 \cdot \ln(2) = \ln(6) - \ln(2)$ y $\cos(x) \to 1$, observando nuevamente que la indefinición ha desaparecido. Así, simplemente reemplazamos para obtener:

$$\lim_{x\to 0} \frac{6^x - 2^x}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{\ln(6) - \ln(2)}{1} = \ln\left(\frac{6}{2}\right) = \ln(3)$$

P6. Sea $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(kx)}{x}$, $k \neq 0$. Demuestre que se satisface la relación

$$f''(x) + \frac{2}{x}f'(x) = -k^2 f(x)$$

Solución: Aprovecho de colocar aquí la solución más económica (y más creativa) que no encontré al final de la clase. Aquí aprovechamos el hecho de que debemos derivar dos veces, y que al derivar la función seno dos veces *vuelve a aparecer la función seno* (multiplicada por algunas cosas, pero aparece). Aquí va:
Puesto que $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(kx)}{x}$, podemos reescribir esto como $xf(x) = \operatorname{sen}(kx)$ y al derivar obtenemos:

$$\begin{aligned} (xf(x))' &= (\operatorname{sen}(kx))' \\ (x)'f(x) + xf'(x) &= \cos(kx)(kx)' \\ f(x) + xf'(x) &= k\cos(kx) \end{aligned}$$

Y derivando esta última igualdad para obtener $f''(x)$:

$$\begin{aligned} (f(x) + xf'(x))' &= (k\cos(kx))' \\ f'(x) + (xf'(x))' &= -k\operatorname{sen}(kx)(kx)' \\ f'(x) + (x)'f'(x) + xf''(x) &= -k^2\operatorname{sen}(kx) \\ f'(x) + f'(x) + xf''(x) &= -k^2\operatorname{sen}(kx) \\ xf''(x) + 2f'(x) &= -k^2\operatorname{sen}(kx) \end{aligned}$$

Donde nuevamente a aparecido nuestro $\operatorname{sen}(kx)$. Reemplazando convenientemente este término tenemos finalmente:

$$xf''(x) + 2f'(x) = -k^2 xf(x) \Rightarrow f''(x) + \frac{2}{x}f'(x) = -k^2 f(x)$$

P7. Considere la sucesión (a_n) definida por:

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \sqrt{\frac{4 + a_n^2}{2}},\ \forall n \geq 1$$

a) Demuestre que $1 \leq a_n < 2,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Solución: Puesto que la sucesión es dada en una relación recursiva, lo más fácil es proceder por inducción matemática.
Caso Base: El caso base es $n = 1$ el cual se satisface de manera trivial puesto que $a_1 = 1$.
Suposición: Suponemos la propiedad válida para algún $n \in \mathbb{N}$. Es decir, que $1 \leq a_n < 2$ para algún n.
Tesis inductiva: Queremos demostrar entonces que la propiedad es cierta para $n + 1$. Es decir, que dada la validez de la propiedad para n, se cumple también $1 \leq a_{n+1} < 2$.
Demostración: Recordemos que $a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{4 + a_n^2}{2}}$. Trabajando con $1 \leq a_n < 2$ tenemos necesariamente que:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \leq & a_n & < & 2 \\ 1 & \leq & a_n^2 & < & 4 \\ 5 & \leq & 4 + a_n^2 & < & 8 \\ \dfrac{5}{2} & \leq & \dfrac{4 + a_n^2}{2} & < & 4 \\ \sqrt{\dfrac{5}{2}} & \leq & \sqrt{\dfrac{4 + a_n^2}{2}} & < & 2 \\ \sqrt{\dfrac{5}{2}} & \leq & a_{n+1} & < & 2 \end{array}$$

Y notando que $\sqrt{\frac{5}{2}} \geq 1$, concluimos por transitividad que $1 \leq a_{n+1} < 2$.
Por lo tanto, se ha probado que $1 \leq a_n < 2,\ \forall n \in \mathbb{N}$

b) Demuestre que (a_n) es estrictamente creciente.

Solución: Nuevamente lo más fácil es proceder por inducción matemática.
CASO BASE: El caso base es $n = 1$. Tenemos $a_1 = 1$ y $a_2 = \sqrt{\frac{4+1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$. Es directo que $a_2 > a_1$
SUPOSICIÓN: Suponemos la propiedad válida para algún $n \in \mathbb{N}$. Es decir, que $a_{n+1} > a_n$ para algún n.
TESIS INDUCTIVA: Queremos demostrar entonces que la propiedad es cierta para $n + 1$. Es decir, que dada la validez de la propiedad para n, se cumple también $a_{n+2} > a_{n+1}$.
Demostración: Recordemos que $a_{n+1} = \sqrt{\frac{4+a_n^2}{2}}$. Notemos también que dado que siempre $a_n > 1$, podemos asegurar que $a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_{n+1}^2 > a_n^2$. Si no supiésemos esto, no podríamos garantizar alguna relación de desigualdad de los cuadrados (recuerde que la función $f(x) = x^2$ cambia de crecimiento). Trabajando con $a_{n+1} > a_n$ tenemos necesariamente que:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &> a_n \\
a_{n+1}^2 &> a_n^2 \\
4 + a_{n+1}^2 &> 4 + a_n^2 \\
\frac{4 + a_{n+1}^2}{2} &> \frac{4 + a_n^2}{2} \\
\sqrt{\frac{4 + a_{n+1}^2}{2}} &> \sqrt{\frac{4 + a_n^2}{2}} \\
a_{n+2} &> a_{n+1}
\end{aligned}$$

Que era lo que se quería demostrar.
Por lo tanto, se ha probado que $a_{n+1} > a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$, esto es, que la sucesión es estrictamente creciente.

c) Justifique la convergencia de (a_n) y calcule su límite.
Solución: Puesto que (a_n) es estrictamente creciente y es acotada superiormente por 2, en virtud del Teorema de las Sucesiones Monótonas concluímos su convergencia a su supremo. Para calcular el límite aprovechamos la relación de recursividad y el hecho de que a_n y a_{n+1} tienen el mismo límite. Tenemos por un lado que $a_{n+1} \to L$ para algún L que deseamos determinar. Pero por otra parte tenemos que:

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{4 + a_n^2}{2}} \to \sqrt{\frac{4 + L^2}{2}}$$

Y dada la unicidad del límite para a_{n+1}, necesariamente se debe cumplir que:

$$L = \sqrt{\frac{4 + L^2}{2}}$$

Que constituye una ecuación para determinar L. En primer lugar es bueno notar que L es positivo, así que cualquier solución negativa se descarta inmediatamente.

$$L = \sqrt{\frac{4 + L^2}{2}} \Rightarrow L^2 = \frac{4 + L^2}{2} \Rightarrow L^2 = 4 \Rightarrow L = 2$$

Por lo tanto, $\lim a_n = 2$.