FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Departamento de Ingeniería Matemática
MA1002 - 6 / Cálculo Diferencial e Integral
Semestre Primavera 2014

Auxiliar 12

Profesor: Raúl Uribe S.

Auxiliar: Patricio Santis T.

07 de Noviembrebre de 2014

Problema 1

Considere la curva Γ parametrizada por $\overrightarrow{\chi}(t) = (e^{-t}\cos(t), e^{-t}\sin(t), e^{-t})$ $t \in [0, \infty)$.

a) Demostrar que la curva esta contenida en el cono de ecuación $x^2 + y^2 = z^2$. Dibuje la curva.

b) Calcular la velocidad y rapidez de una partícula que sigue la parametrización en un punto t_0

c) Mostrar que la curva es regular $\forall\ t$.

d) Encontrar los vectores Tangente, Normal y largo de la curva en $t \in [0, 2\pi]$.

e) Demostrar que en cada punto de la curva, el vector Tangente forma un ángulo constante con el vector $\dfrac{\overrightarrow{r}}{||\overrightarrow{r}||}$

f) Encontrar el vector binormal, torsión y curvatura, para cualesquier t.

Problema 2

Considere la curva en $\mathbb{R}^2$ parametrizada por $\overrightarrow{r}(t) = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_1^t \frac{\cos u}{u} du \\ \displaystyle\int_1^t \frac{\sin u}{u} du \end{pmatrix}$, $t \in [1, t_0]$.

Calcule el largo de la curva entre $t \in [1, t_0]$, sabiendo que $t = t_0$ es el primer instante mayor a 1, donde el vector tangente a la curva es vertical.

Problema 3

Considere una curva Γ que se obtiene de la intersección de la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, donde $a > 0$.

a) Encuentre una parametrización para Γ.

b) Si Γ es un alambre de densidad de masa $\rho(x, y, z) = \dfrac{2a}{\sqrt{8a^2 - x^2 - y^2}}$. Calcular la masa del alambre.

Problema 4

Considere la curva Γ que se forma al intersectar las superficies, con $z > 0$

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$x^2 + z^2 = 4 + y^2$$

a) Parametrice Γ.

b) Calcular $\hat{T}$, $\hat{N}$, $\hat{B}$, κ y τ.

c) Calcule el centro de masa suponiendo densidad lineal de masa dada por $\rho(x, y, z) = xy$. *Deje las integrales expresadas.*

Problema 5

Sea una curva Γ que cumple con que existe un punto P_0 por el cual pasan todas las rectas normales de Γ. Se define $P_0 = \vec{\sigma}(s) + \phi(s)\widehat{N}(s)$, donde $\vec{\sigma}(s)$ es la parametrización en longitud de arco de la curva Γ, $\widehat{N}(s)$ es el vector normal de la curva Γ y $\phi : [0, l_0] \to \mathbb{R}$, $\phi \in C^1$. Demuestre que $\kappa(s) = 1$, $\tau(s)\phi(s) = 0$ y $\phi'(s) = 0$, donde $\kappa(s)$ y $\tau(s)$ son la curvatura y torsión de la curva Γ. Concluya que Γ es una curva plana.

★ Propuestos

$\boxed{\text{P1}}$ Se tiene una curva regular $\vec{r}(s)$ parametrizada por longitud de arco, con curvatura $\kappa(s)$ y torsión $\tau(s)$ definidas en $\mathbb{R}^3$. Determinar la curvatura de $\vec{r}\,'(s)$.
Hint: Podría serle útil aplicar el triedro de Frenet.

$\boxed{\text{P2}}$ Calcule la masa de un alambre que tiene la forma de una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = R^2$ si su densidad de masa es $\rho(x, y) = 2|x| + |y|$

Ni tus propios enemigos, pueden hacerte tanto daño, como tus propios pensamientos.