Auxiliar 2 - Matrices Elementales y Sistemas Lineales

MA1102-4 Álgebra Lineal

Profesor: Jorge Amaya
Profesores Auxiliares: Felipe Garrido Lucero - Pablo Ugalde Salas

P1. Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

1. Demuestre que $A^2 = 0 \Rightarrow A - I$ es invertible.
2. Demuestre que si $A^2 + 2A + I = 0$ entonces A es invertible.

P2. Sea la matriz de 4 filas y 4 columnas, triangular superior a coeficientes reales dada por:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sea $N = C - I$ con I la matriz indentidad. Demuestre que:

1. $N^4 = 0$.
2. C es invertible y su inversa es $C^{-1} = I - N + N^2 - N^3$.
3. Generalice para el caso de una matriz de n por n.

P3. Sea el sistema de ecuaciones:

$$\text{i) } x_1 + 2x_2 + x_4 - 6x_5 = 1.$$
$$\text{ii) } x_1 + 4x_2 + 6x_+3 + 12x_4 + 10x_5 = 18$$
$$\text{iii) } 2x_1 + 4x_3 + x_3 + 7x_4 - 5x_5 = 8$$
$$\text{iv) } 3x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 14x_4 - 2x_5 = 20$$
$$\text{v) } -x_1 + 5x_3 + x_4 + 17x_5 = 10.$$

Escríbalo en forma matricial y resuélvalo. ¿Existe solución? ¿Es única?

P4. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & 4 & 2\alpha \\ 0 & \alpha & -1 & 2\alpha + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 2+\alpha \\ 2\beta + \alpha - 2 \end{bmatrix}.$$

Interprete la solución del sistema de ecuaciones en función de los parámetros α, β.