Auxiliar 14 - Examen

MA1102-4 Álgebra Lineal

Profesor: Jorge Amaya
Profesores Auxiliares: Felipe Garrido Lucero - Pablo Ugalde Salas

P1. Sea $\mathcal{P}_3(\mathbb{R}) = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]/grado(p(x)) \leq 3\}$ y considere la transformación lineal $L : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definida por

$$L(p(x)) = p(0)x^3 + p(1)(x-4)^2$$

i) Calcule la matriz representante de L cuando en el espacio de partida y en el espacio de llegada se usa la base canónica $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$.

ii) Usando matrices de cambio de base calcule la matriz representante de L cuando en los espacios de partida y llegada consideramos la base $\beta = \{1, x, (x-4)^2, x^3\}$.

P2. Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios a coeficientes reales de grado menor o igual a 2, y sea $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ la transformación lineal definida por

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + 2a_2) + a_1x + (2a_0 + a_2)x^2$$

i) Verifique que la matriz representante de T con respecto a la base canónica $\{1, x, x^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ (en dominio y recorrido) es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ii) Calcule A^{2n}, para cada natural $n \geq 1$.

iii) Calcule $T^{2n}(1 + x + x^2)$, donde $T^{2n} = T \circ T \circ ... \circ T$, es decir, la composición de T consigo mismo $2n$ veces.

P3. Sea $a \in \mathbb{R}$. Se define una sucesión de números reales $(u_n)_{n\in\mathbb{R}}$ de la siguiente manera: $u_0 = 1, u_1 = a$, $(\forall n \geq 2)$, $u_n = au_{n-1} - u_{n-2}$.

Sean $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\forall n \geq 1$, $x_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$.

i) Demuestre que $\forall n \geq 0$, se tiene que $x_n = A^n x_0$ donde $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

ii) Demuestre que si $|a| = 2$ entonces A no es diagonalizable.

iii) Demuestre que si $|a| > 2$ entonces A si es diagonalizable.

iv) Asumamos que $a > 2$ y denotemos λ_1, λ_2 los valores propios de A. Demuestre que:

- $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ son vectores propios asociados a λ_1, λ_2 respectivamente.
- Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $u_n = \dfrac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}$

P4. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y considere la ecuación

$$(\alpha + 2)x^2 + (\alpha + 2)y^2 + 2\alpha xy = 1$$

Determine, cuando exista, los valores del parámetro α para los cuales la ecuación representa: circunferencia, parábola, elipse, hipérbola, recta o rectas, un punto, conjunto vacío.