



MA 3705 - Auxiliar 2

Profesor: José Soto S.

Auxiliares: Felipe Contreras S. Abner Turkieltaub M.

14 de agosto, 2014

Def: Dado un árbol T , llamaremos *cuello de botella* al peso máximo de sus aristas.

P1. Demuestre que todo árbol generador de costo mínimo es un árbol generador con cuello de botella mínimo.

Def: Dada una matriz A con coeficientes en un cuerpo K , la matroide representada por A corresponde a la matroide cuyos elementos son las columnas de A y los conjuntos independientes son los conjuntos de columnas linealmente independientes.

Def: Dos matroides $M = (E, \mathcal{I})$, $M' = (E', \mathcal{I}')$ se dicen *isomorfas* si existe una función biyectiva $\varphi: E \rightarrow E'$ tal que

$$\forall F \subseteq E, F \in \mathcal{I} \iff \varphi(F) \in \mathcal{I}'$$

Def: Una matroide M se dice *representable* en un cuerpo K si existe una matriz A con coeficientes en K tal que M y la matroide representada por A son isomorfas.

P2.

- a) Demuestre que toda matroide gráfica es representable en \mathbf{R} .
- b) Considere la matroide $M = (E, \mathcal{I})$, donde $E = \{A, B, C, P, Q, R, X, Y, Z\}$ y los conjuntos independientes son los subconjuntos de tamaño hasta 3, salvo por

$$\{ABC, XYZ, AQZ, APY, BPX, BRZ, CQX, CRY\}.$$

Demuestre que M es matroide no gráfica.

P3. Considere el siguiente algoritmo

SWAP($M = (E, \mathcal{I}), w, k$):

```
Sea  $S \in \mathcal{I}$  cualquiera de tamaño  $k$ 
while  $\exists S' \in \mathcal{I}, |S| = k, |S \Delta S'| = 2, w(S') > w(S)$  do
  |  $S \leftarrow S'$ 
end
```

Demuestre que si M es matroide, entonces SWAP devuelve un conjunto independiente de cardinalidad k y de peso máximo.

P4. Christopher camina todos los días desde su casa a la univeridad. Sin embargo, como toda gran capital, la contaminación acústica está siempre presente, por lo que Christopher decide invertir en audífonos con aislación de ruido. Para ello, como no le importa caminar demás, quiere saber cuánto es el mínimo nivel de ruido que deben aguantar sus audífonos si quiere poder llegar desde su casa a la universidad.

Dados un grafo de n vertices y m aristas, un nodo de origen s y uno de destino t , y los niveles de ruido en las aristas, diseñe un algoritmo que encuentre el mínimo nivel de ruido que deben aguantar los audífonos de Christopher si quiere ir de s a t . Analice la complejidad de tal algoritmo.