MA3705. Algoritmos Combinatoriales. 2014.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Francisco Fernández y Emilien Garcia.
Fecha: 29 de Septiembre 2014 .

Cátedra 14

1. Emparejamiento con Peso Mínimo en Grafos Bipartitos

En las clases anteriores estudiamos problemas de emparejamientos (o matchings). Vimos algunos resultados muy importantes para resolverlos, en particular vimos condiciones para encontrar un matching M de cardinalidad máxima (usando caminos M-aumentantes o cubrimientos), y también vimos resultados más fuertes que se tienen en el caso de un grafo bipartito (entre ellos el teorema de König). Recordemos algunos de estos resultados antes de desarrollar el tema de los emparejamientos con peso mínimo en grafos bipartitos.
En los recordatorios que siguen, denotaremos por $G = (V, E)$ un grafo.

Recordatorio 1 (Matching)**.** $M \subseteq E$ es un *matching* ssi $\forall e, f \in M, e \cap f = \emptyset$.

Recordatorio 2 (Cubrimiento)**.** $C \subseteq V$ es un *cubrimiento* (por vértices) ssi toda arista de E es incidente a algún vértice de C.

Recordatorio 3 (Grafo Bipartito)**.** G es un *grafo bipartito* ssi $\exists L, R$ con $L \cap R = \emptyset, L \cup R = V$ tales que toda arista de E tiene un extremo en L y uno en R.

Recordatorio 4 (Teorema de König)**.** Si G es un grafo bipartito, entonces $\max \{|M| : M \text{ matching}\} = \min \{|C| : C \text{ cubrimiento}\}$.

Recordatorio 5 (Teorema)**.** Si M es un matching máximo, entonces $C = (L \setminus T) \cup (R \cap T)$ es un cubrimiento con $|C| = |M|$, donde T es el conjunto de nodos alcanzables desde el vértice s del digrafo auxiliar $D(G, M)$.

Definición 1 (Matching Perfecto)**.** Un matching M se dice *perfecto* ssi todo vértice del grafo está cubierto por una arista del matching.

Ahora que terminamos con los recordatorios útiles para lo que sigue, plantearemos tres tipos de problemas de emparejamiento con peso mínimo en un grafo bipartito. De ahora en adelante consideraremos el grafo bipartito $G = (L, R; E)$, sobre el cual resolveremos los siguientes problemas:

1. Dada una función de peso $w : E \to \mathbb{R}$ encontrar M matching de peso máximo.
2. Dada una función de peso $w : E \to \mathbb{R}$ y un $k \in \mathbb{N}$ encontrar M matching de peso máximo sujeto a $|M| = k$
3. **Problema de asignación.** Sea $c : E \to \mathbb{R}$ y G un grafo bipartito completo simétrico, es decir:

$$|L| = |R| \text{ y } E = \{ij : (i, j) \in L \times R\}.$$

   Dado todo esto, encontrar una asignación $\phi : L \to R$ biyectiva de costo mínimo, o equivalentemente, un matching M perfecto de costo mínimo.

Observación 1. En realidad, el tercer problema permite resolver también los dos anteriores. No demostraremos que el problema 3 resuelve el problema 1, esto queda como problema propuesto (más aún **controlable**). Sin embargo, probemos ahora que el problema 3 resuelve el problema 2, demostración más sencilla que la anterior :
Dem. Procedamos por etapas. Supongamos, para dar sentido a la demostración, que existe matching de tamaño k. Luego $|L|, |R| \geq k$. A continuación:

1. Creemos el conjunto de vértices L', añadiendo al conjunto L, $|R| - k$ vértices fantasmas.
2. Creemos el conjunto de vértices R', añadiendo al conjunto R, $|L| - k$ vértices fantasmas.
3. Ahora que L' y R' tienen igual número de vértices, creemos el conjunto de aristas $E' = L' \times R'$.

4. Definamos nuestra función de costo c a partir de la función de peso w del problema 2, eligiendo un número $N \in \mathbb{N}$ muy grande (mayor que el máximo de $|w|$) :

$$c(e) = \begin{cases} -N & si \quad e \in (L \times (R' \setminus R)) \cup ((L' \setminus L) \times R) \\ \\ -w(e) & si \quad e \in E \\ \\ +N & si \quad e \in (L' \setminus L) \times (R' \setminus R) \end{cases}$$

De esta manera queda definido un grafo bipartito completo simétrico y una función de peso cuyo mínimo se alcanza sólo cuando se ocupan k aristas de L a R. Luego, solucionando este problema de asignación se obtiene una solución del problema 2 original.

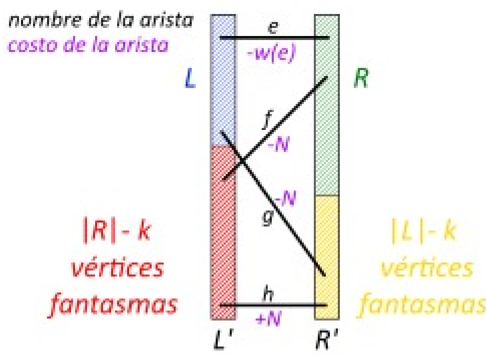

Figura 1: Dibujo que ilustra el desarrollo anterior.

2. Problema de Asignación

En esta sección resolveremos el problema de asignación enunciado en lo anterior. Sea $G = (L, R; E)$ un grafo bipartito completo y $c : E \to \mathbb{R}$ una función de costo. Modelemos el problema y reduzcámoslo a un problema de optimización lineal. Buscamos M matching perfecto de peso mínimo, esto se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\min_{M\ perfecto} c(M) = \min_{M\ perfecto} \sum_{e\in M} c(e) = \min_{M\ perfecto} \sum_{e\in E} c(e)\mathbb{1}_M(e).$$

Si definimos $c_e = c(e)$ y $x_e = \mathbb{1}_M(e)$ nos queda:

$$\min_{M\ perfecto} c(e) = \min_{M\ perfecto} \sum_{e\in E} c_e x_e.$$

La condición M matching perfecto es equivalente a que para todo vértice v, existe un único e que contenga a v tal que $x_e = 1$. Es decir:

$$\forall i \in L,\ \sum_{j\in R} x_{ij} = 1 \text{ y } \forall j \in R,\ \sum_{i\in L} x_{ij} = 1.$$

Luego el problema se puede modelar por el siguiente Programa Lineal Entero:

$$(PLE)\ :\ \text{mín} \sum_{e\in E} c_e x_e \text{ sujeto a } x_e \in \{0,1\};\ \forall i \in L\ \sum_{j\in R} x_{ij} = 1 \text{ y } \forall j \in R\ \sum_{i\in L} x_{ij} = 1$$

Relajemos este Programa Lineal Entero a un Programa Lineal, permitiendo $x_e \in [0,1]$. Como ya se tiene la restricción que la suma sea igual a uno, la segunda cota es innecesaria, luego en el programa lineal se tiene simplemente que $x_e \geq 0$. Además como el grafo es bipartito completo, podemos escribir $E = \{ij : (i,j) \in L \times R\}$. Luego el problema queda reescrito como:

$$(PL)\ :\ \text{mín} \sum_{i\in L,\ j\in R} c_{ij}x_{ij} \text{ sujeto a } x_{ij} \geq 0\ \ \forall i \in L\ \sum_{j\in R} x_{ij} = 1 \text{ y } \forall j \in R\ \sum_{i\in L} x_{ij} = 1$$

Tomemos el Dual de (PL). Sea $y_i = \sum_{j\in R} x_{ij}$ y $z_j = \sum_{i\in L} x_{ij}$. Luego el Dual de (PL) es:

$$(D)\ :\ \text{máx} \sum_{i\in L} y_i\ +\ \sum_{j\in R} z_j \text{ sujeto a } c_{ij} \geq y_i\ +\ z_j.\quad y_i \text{ y } z_j \text{ son libres}$$

Recordatorio 6. Dualidad Débil Toda solución factible del problema Primal tiene un valor mayor que toda solución factible del Dual. En este caso se tiene:

$$\sum_{i\in L,\ j\in R} c_{ij}x_{ij}\ \geq\ (\sum_{i\in L} y_i)\ +\ (\sum_{j\in R} z_j)$$

Dem.

$$\sum_{i\in L, j\in R} c_{ij}x_{ij}\ =\ \sum_{i\in L}\sum_{j\in R} c_{ij}x_{ij}\ \geq\ \sum_{i\in L}\sum_{j\in R}(y_i + z_j)x_{ij} = (\sum_{i\in L}\sum_{j\in R} y_i x_{ij}) + (\sum_{i\in L}\sum_{j\in R} z_j x_{ij}) = (\sum_{i\in L} y_i \sum_{j\in R} x_{ij}) + (\sum_{j\in R} z_j \sum_{i\in L} x_{ij})$$

Como $\forall i \in L\ \sum_{j\in R} x_{ij} = 1$ y $\forall j \in R\ \sum_{i\in L} x_{ij} = 1$ se concluye que:

$$\sum_{i\in L,\ j\in R} c_{ij}x_{ij}\ \geq\ (\sum_{i\in L} y_i)\ +\ (\sum_{j\in R} z_j)$$

Diseñaremos entonces un algoritmo PRIMAL-DUAL que haga lo siguiente :
PRIMAL-DUAL

1. Elegir/encontrar una solución dual factible (y, z).
2. Usar (y, z) para encontrar un M de igual valor :
   - Si se encuentra, estamos listos.
   - Si no, usar la información que tenemos para mejorar (y, z).

Observación 2. Sea (y, z) dual factible, si (y^*, z^*) fuera óptimo, entonces existiría x^* primal de mismo valor, y por *Holgura Complementaria* :

$$\text{Si } c_{ij} > y_i^* + z_j^*, \text{ entonces } x_{ij}^* = 0 \text{ ; Si } x_{ij}^* > 0, \text{ entonces } c_{ij} = y_i^* + z_j^*$$

Definamos $\forall(i, j) \in E$, $w_{ij} = c_{ij} - y_i - z_j$.
Busquemos un matching que use sólo las aristas en $E_0 = \{(i, j) \in E \mid w_{ij} = 0\}$.
Si llegaramos a encontrar un matching perfecto M^* en E_0, tendríamos :

$$valor(M^*) = \sum_{(i,j)\in M^*} c_{ij} = \sum_{(i,j)\in M^*} (y_i + z_j) = \sum_{i\in L} y_i + \sum_{j\in R} z_j = valor(y, z)$$

En efecto, las sumatorias se separan en dos sumas, una sobre L y una sobre R (pues M^* es perfecto), por lo que sus aristas pasan por todos los vértices de V, en particular todos los de L y R. Por lo tanto, con esta igualdad, tendríamos que M^* es óptimo para nuestro problema.

Sin embargo, es posible que E_0 no contenga matching perfecto. En este caso, busquemos M' matching de tamaño máximo en E_0. Por el teorema de König, sabemos que existe C cubrimiento de (V, E_0) con $|C| = |M'|$. Como vimos la clase pasada, C se podría encontrar como $C = (L \setminus T) \cup (R \cap T)$, donde T es el conjunto de los alcanzables en $D = (G, M')$ desde s, el vértice ficticio añadido al grafo. Queremos usar C para identificar vértices donde alterar (y, z) de modo que el valor total aumente.

C cubrimiento de $E_0 \Rightarrow (L \cap T) \times (R \setminus T) \subseteq E \setminus E_0$: no pueden existir aristas entre $L \cap T$ y $R \setminus T$ en E_0. Para $ij = e \in (L \cap T) \times (R \setminus T)$, $w_{ij} > 0$, luego $c_{ij} > y_i + z_j$.

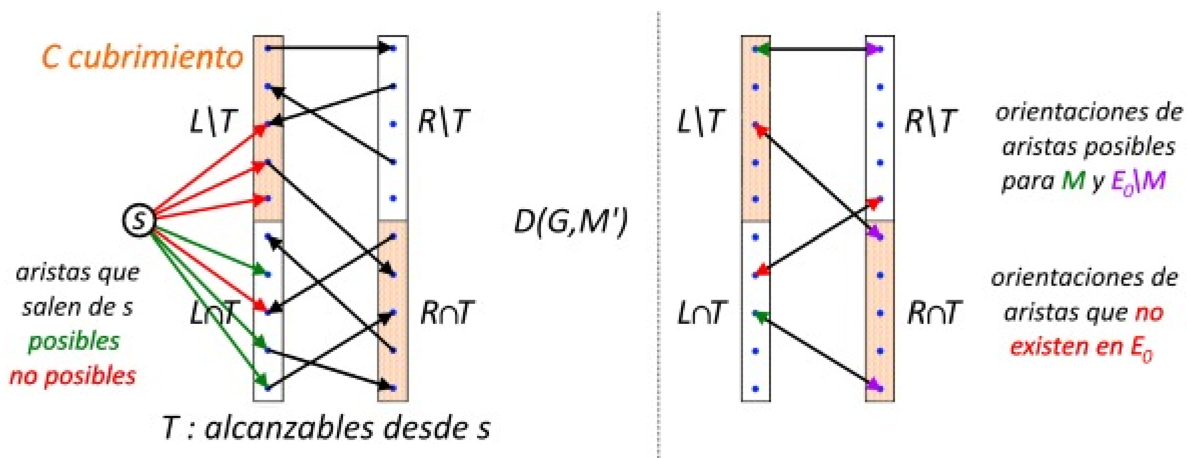

Figura 2: A la izquierda figura una representación del digrafo asociado a E_0, con el vértice s añadido y las aristas que se pueden encontrar o no desde s. A la derecha aparece una ilustración de las distintas orientaciones para las aristas encontrables en el digrafo construido con E_0.

Definamos $\delta = \min \{w_{ij} : (i, j) \in (L \cap T) \times (R \setminus T)\}$. Sean también (y', z') tales que :

$$y_i' = \begin{cases} y_i + \delta & si \quad i \in L \cap T \\ y_i & si \quad i \in L \setminus T \end{cases} \qquad z_j' = \begin{cases} z_j - \delta & si \quad j \in R \cap T \\ y_i & si \quad j \in R \setminus T \end{cases}$$

Veamos que (y', z') es dual factible. Sea (i, j) arista de E :

- Si $i \in L \cap T$ y $j \in R \setminus T$, por elección de δ tenemos que : $y'_i + z'_j = y_i + z_j + \delta \leq c_{ij}$
- Si $i \in L \setminus T$ y $j \in R \setminus T$, obtenemos : $y'_i + z'_j = y_i + z_j \leq c_{ij}$
- Si $i \in L$ y $j \in R \cap T$, tenemos que : $y'_i + z'_j \leq y_i + z_j \leq c_{ij}$

Luego (y', z') es dual factible ; además, $valor(y', z') = \sum_{i \in L} y'_i + \sum_{j \in R} z'_j$ y $valor(y, z) = \sum_{i \in L} y_i + \sum_{j \in R} z_j$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} valor(y', z') - valor(y, z) &= \sum_{i \in L} (y'_i - y_i) + \sum_{j \in R} (z'_j - z_j) \\ &= \delta . |L \cap T| - \delta . |R \cap T| \\ &= \delta . (|L| - |L \setminus T| - |R \cap T|) \\ &= \delta . (|L| - |C|) \geq \delta > 0 \end{aligned}$$

En efecto, tenemos $L = (L \setminus T) \cup (L \cap T)$, $C = (L \setminus T) \cup (R \cap T)$ y $|L| - |C| \geq 1$. Si esto último no se tuviera, C sería un cubrimiento total, luego M' sería un matching perfecto de E_0, lo que contradice nuestra hipótesis en esta parte (E_0 no contiene matching perfecto).

$$\therefore (y', z') \text{ es una solución del dual mejor que } (y, z).$$

3. Algoritmo Húngaro Primal-Dual

El algoritmo que deducimos de la sección anterior es el siguiente:

Algoritmo 1 Algoritmo Húngaro Primal-Dual

Encontrar Solución Inicial Del Problema Dual:
$y_i \leftarrow 0,\ \forall i \in L.$
$z_j \leftarrow \text{mín}\{c_{ij} : i \in L\},\ \forall j \in R.$
$w_{ij} \leftarrow c_{ij} - y_i - z_j,\ \forall i \in L,\ \forall j \in R.$
$E_0 \leftarrow \{ij \in E : w_{ij} = 0\}.$
$M' \leftarrow$ matching de tamaño máximo en (V, E_0).
while (M' no es matching perfecto en E_0) **do**
    Crear grafo dirigido $D((V, E_0), M')$.
    $T \leftarrow$ vértices alcanzables desde s en $D((V, E_0), M')$.
    $\delta \leftarrow \text{mín}\{w_{ij} : i \in L \cap T, j \in R \setminus T\}.$
    $y_i \leftarrow y_i + \delta,\ \forall i \in L \cap T.$
    $z_j \leftarrow z_j - \delta,\ \forall j \in R \cap T.$
    $w_{ij} \leftarrow c_{ij} - y_i - z_j,\ \forall i \in L,\ \forall j \in R.$
    $E_o \leftarrow \{ij \in E : w_{ij} = 0\}.$
    $M' \leftarrow$ matching máximo en (V, E_0).
end while
return $M', y, z.$

Teorema 1. *El Algoritmo Húngaro Primal-Dual,* ***si es que termina****, devuelve un emparejamiento (matching) perfecto M' de costo mínimo y devuelve un par (y, z) solución dual de mismo valor que el emparejamiento.*

Dem. En verdad, la demostración de este teorema la completaremos en la próxima clase. Ya vimos en la sección anterior el tema de la correctitud, pero todavía no sabemos si el algoritmo termina. Lo veremos mostrando que el algoritmo es polinomial y tiene complejidad $O(n^4)$.

En la próxima clase, seguiremos demostrando este teorema y otros más. Veremos también la relación entre nuestro tema y la intersección de dos matroides.