MA3705. Algoritmos Combinatoriales. 2014.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Enzo Aljovin, Felipe Arbulú y David Hasson.
Fecha: 06 de Octubre 2014.

Cátedra 16

1. Intersección de Matroides

Definición 1 (Intersección de Matroides)**.** Sean $M_1 = (S, \mathcal{I}_1), M_2 = (S, \mathcal{I}_2)$ con igual conjunto de referencia S. Decimos que $I \in S$ está en la intersección de M_1 y M_2, si $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$.

A continuación se presentan ejemplos:

1. Matchings en grafos bipartitos

Sea $G = (L, R; E)$ (recordamos que L, R corresponden a la partición de la definición de bipartito). Definimos el conjunto de referencia $S \doteq E$ y

$$\mathcal{I}_1 \doteq \{F \subseteq E \mid |F \cap \delta(v)| \leq 1 \quad \forall v \in L\},$$
$$\mathcal{I}_2 \doteq \{F \subseteq E \mid |F \cap \delta(v)| \leq 1 \quad \forall v \in R\}.$$

Notemos que los conjuntos independientes anteriores definen matroides de partición. En efecto,

$$E = \dot{\bigcup_{v \in L}} \delta(v) \text{ y } E = \dot{\bigcup_{v \in R}} \delta(v).$$

2. Branchings (r - branchings)

Sea $G = (V, E)$ un digrafo. Un branching es un subconjunto $F \subseteq E$ donde todo v tiene a lo más un "padre" y puede tener varios hijos. Además entre cada par de nodos hay a lo más un camino (en cualquier dirección). Llamamos r-branching a aquellos branchings donde $r \in V$ no tiene padre.

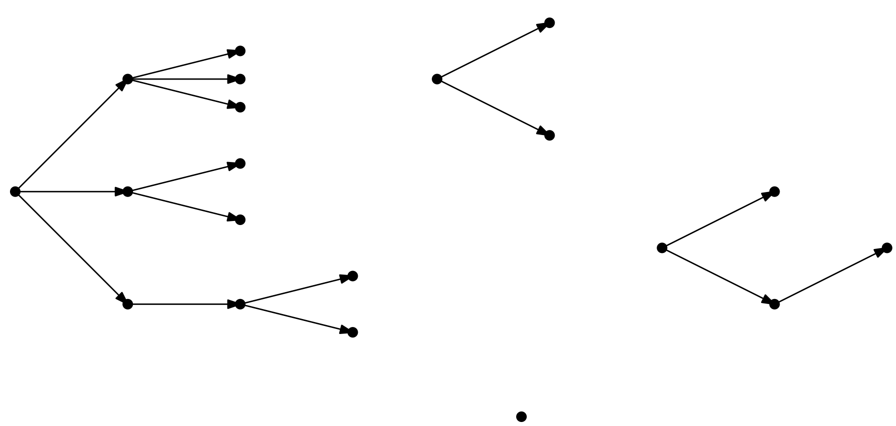

Figura 1: Ejemplo de branching.

Proposición 1 (Caracterización branchings)**.** *F es un branching* $\iff F \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \{F \subseteq E \mid F \textit{ (sin considerar dirección) es un bosque}\} \\ \mathcal{I}_2 &= \{F \subseteq E \mid |F \cap \delta^-(v)| \leq 1 \quad \forall v \in V - r\ , \quad |F \cap \delta^-(r)| \leq 0\} \end{aligned}$$

Demostración.

Solo debemos ver que ambos conjuntos definen matroides. En efecto, $\mathcal{I}_1$ define una matroide gráfica y, usando que $E = \dot{\bigcup}_{v \in V} \delta^-(v)$, $\mathcal{I}_2$ induce una matroide de partición. ■

3. Problema

Sea $G = (V, E)$ grafo donde cada arista $e \in E$ tiene un color $c(e)$. Determinar si existe un árbol generador multicolor (es decir, todas las aristas tienen distinto color).

Una solución de este problema es un conjunto F, donde:

- F es una base de $\mathcal{M}(G)$ (matroide gráfica), es decir, $F \in \mathcal{I}(\mathcal{M}(G))$, $|F| = n - 1$
- $F \in \mathcal{I}_2$ con $\mathcal{I}_2 = \left\{ F \subseteq E \;\middle|\; \left| F \cap c^{-1}(k) \right| \leq 1 \quad \forall \text{ color } k \right\}$.

Observación 1. *Notamos que $\mathcal{I}_2$ corresponde a una matroide de partición y, además, $c^{-1}(k)$ corresponde al conjunto de aristas que son llevadas al color k.*

4. Orientaciones

Sea $G = (V, E)$ grafo y sea $k : V \to \mathbb{N}$. Una orientación de G que respeta los grados de entrada, k, es un digrafo $D = (V, A)$ cuyo grafo subyacente es G y tal que $d_A^-(v) \leq k(v)$ $\forall v \in V$.

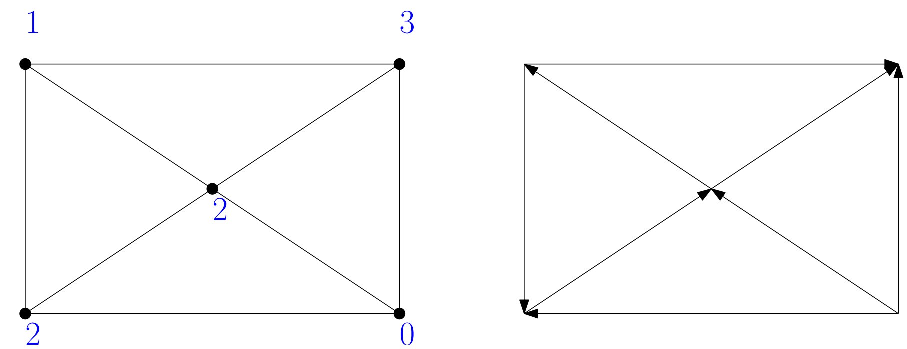

Figura 2: Ejemplo de orientación que respeta los grados de entrada.

- $\mathcal{M}_1 = (S, \mathcal{I}_1)$ donde

$$\begin{array}{rcl} S & = & \bigcup_{uv \in E} \{(u, v), (v, u)\} \\ \mathcal{I}_1 & = & \{F \subseteq S \mid |F \cap \{(u, v), (v, u)\}| \leq 1 \quad \forall uv \in E\} \end{array}$$

- $\mathcal{M}_2 = (S, \mathcal{I}_2)$ donde

$$\mathcal{I}_2 = \left\{ F \subseteq S \;\middle|\; \left| F \cap \delta_S^-(v) \right| \leq k(v) \right\}$$

Luego, el problema anterior se reduce a encontrar $F \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, con $|F| = |E|$

Observación 2. *Las orientaciones son <u>bases</u> de la matroide $\mathcal{M}_1$, es decir, son los $F \in \mathcal{I}_1$ tales que $|F| = |E|$. Además, nuevamente las clases de conjuntos independientes definidas forman matroides de partición.*

Muchos problemas en optimización combinatorial se reducen a:

(1) Encontrar un conjunto independiente común a dos matroides de tamaño/peso máximo.

(2) Encontrar un conjunto independiente común de tamaño fijo y de peso máximo.

Nos enfocaremos en el problema (1) en su versión cardinalidad.

Teorema 1. *(de Intersección de Matroides) Sean $M_1 = (S, \mathcal{I}_1), M_2 = (S, \mathcal{I}_2)$ dos matroides sobre S.*

$$\max_{I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2} |I| = \min_{X \subseteq S} \left(r_1(X) + r_2(S \setminus X) \right)$$

Más aún, se puede encontrar el óptimo I^*, X^* en tiempo polinomial.

Antes de proceder con la demostración del teorema, veamos algunas de sus consecuencias.

Corolario 1. *Veamos que se obtiene como consecuencia el teorema de König. En efecto:*

Demostración.
Los matchings son los conjuntos independientes en las matroides de partición.

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &= \{F \subseteq S \mid |F \cap \delta(v)| \leq 1 \quad \forall v \in L\} \\ \mathcal{I}_2 &= \{F \subseteq S \mid |F \cap \delta(v)| \leq 1 \quad \forall v \in R\}\end{aligned}$$

Aplicando el lado izquierdo del teorema de intersección de matroides en su homólogo del teorema de König, se obtiene justamente un matching de tamaño máximo M^*.

Sea $X \subseteq E$. Sean X_L un conjunto de vértices de L que cubre a X, con $|X_L| = r_1(X)$ y X_R un conjunto de vértices de R que cubre a X, con $|X_R| = r_2(S \setminus X)$. Luego, $X_L \cup X_R$ es un cubrimiento de tamaño $r_1(X) + r_2(S \setminus X)$. El teorema de intersección de matroides dice que $\exists X \subseteq S$ con $|M^*| = r_1(X) + r_2(S \setminus X) = |X_L \cup X_R|$.

■

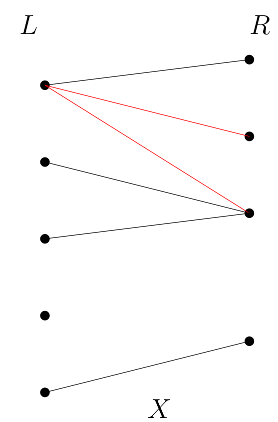

Figura 3: Ejemplo en que el subconjunto X corresponde a las aristas negras.

Corolario 2 (Árboles Multicolor)**.** *Sean $G = (V, E)$, $c : E \to \mathbb{R}$. Definimos*

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &= \{F \subseteq E \mid F \text{ es bosque}\} \\ \mathcal{I}_2 &= \left\{F \subseteq E \;\middle|\; \left|F \cap c^{-1}(k)\right| \leq 1 \quad \forall\, k \text{ color}\right\}\end{aligned}$$

Existe árbol multicolor si y sólo si $\exists F \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ con $|F| = |V| - 1$.

Demostración. Es directo.

■

Corolario 3. *Existe árbol multicolor si y sólo si para todo conjunto de colores C, el número de componentes conexas que quedan al borrar E_c no es más que $|C| + 1$.*

Demostración.
Para C conjunto de colores, llamemos E_C a las aristas de color C (por ejemplo, $E_{\{1,2\}}$ es el conjunto de las aristas de color 1 ó 2). Tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} |V|-1 &= \max_{F\in\mathcal{I}_1\cap\mathcal{I}_2} |F| \\ &= \min_{X\subseteq E} \underbrace{r_2(X)}_{\#\text{colores en } X} + r_1(E\setminus X) \end{aligned}$$

Notar que para todo $X \subseteq E$:

$$\begin{gathered} r_2(X) = r_2(\operatorname{span}_2(X)) \\ r_1(E\setminus X) \geq r_1(E\setminus \operatorname{span}_2(X)), \end{gathered}$$

donde la segunda línea viene del hecho que $X \subseteq \operatorname{span}_2(X)$. Por otro lado es fácil ver que $\operatorname{span}_2(X) = E_{c(X)}$, donde $c(X) = \{c(e)\colon e \in X\}$. La observación anterior nos dice que:

$$\begin{aligned} \min_{X\subseteq E} r_2(X) + r_1(E\setminus X) &= \min_{X\subseteq E, X \text{cerrado para } M_2} r_2(X) + r_1(E\setminus X) \\ &= \min_{C\subseteq c(E)} r_2(E_C) + r_1(E\setminus E_C) \\ &= \min_{C\subseteq c(E)} |C| + |V| - cc(E\setminus E_C). \end{aligned}$$

Por el teorema de intersección de matroides sabemos entonces que existe árbol multicolor si y solo si para todo C, $|C| + |V| - cc(E\setminus E_C) \geq |V| - 1$ Es decir, ssi $|C| + 1 \geq cc(E\setminus E_C)$.
$\forall C$ se tiene que $|V| - 1 \leq |C| + |V| - \operatorname{cc}(E\setminus C)$, vale decir $\operatorname{cc}(E\setminus C) \leq |C| + 1$. ■

El algoritmo para demostrar el teorema de intersección de matroides será inspirado en el de caminos M-aumentantes. Diseñaremos un algoritmo que dado $I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, encuentre o bien

- un conjunto P tal que $I\Delta P \in \mathcal{I}_1\cap\mathcal{I}_2$ y $|I\Delta P| = |I| + 1$. O bien,
- un $X \subseteq S$ tal que $r_1(X) + r_2(S\setminus X) = |I|$

Veamos primero que $\forall I \in \mathcal{I}_1\cap\mathcal{I}_2, \forall X \subseteq S$

$$\begin{aligned} |I| &= \underbrace{|I\cap X|}_{\in\mathcal{I}_1} + |I\cap(S\setminus X)| \\ &\leq r_1(X) + r_2(S\setminus X), \end{aligned}$$

pues $|I\cap X| = r_1(I\cap X) \leq r_1(X)$.

Este tipo de dualidad débil aparece en muchos problemas. Por ejemplo:

$$\max_{I\in\mathcal{I}_1\cap\mathcal{I}_2} |I| \leq \min_{X\subseteq S} r_1(X) + r_2(S\setminus X)$$

$$\begin{bmatrix} \max\limits_{M \text{ Matching}} |M| & \leq & \min\limits_{C \text{ Cover}} |C| \\ \\ \max\limits_{x\in P} c^t x & \leq & \min\limits_{y\in D} b^t y \end{bmatrix}$$

Construcción Auxiliar

Grafo de intercambios de una matroide. Sea $M = (S, \mathcal{I})$ matroide y sea $I \in \mathcal{I}$.

Definición 2 (Grafo de intercambios)**.** Se define $G(M, I)$ un grafo bipartito tal que $e = xy \in E \iff I + y - x \in \mathcal{I}$.

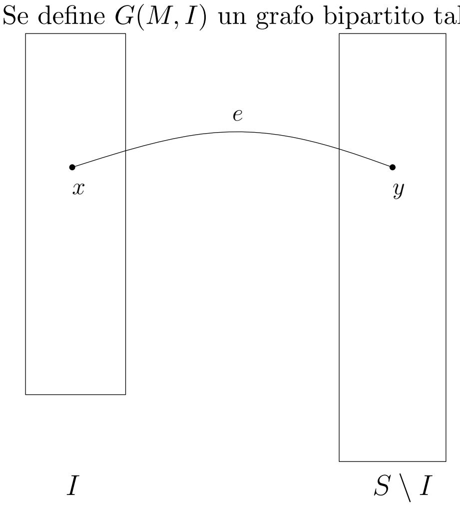

Figura 4: Construcción del grafo bipartito auxiliar.

Observación 3. *$xy \in E \iff y \notin span(I) \vee$ el único circuito en $I + y$ contiene a x*

Lema 1. *Sean $I, J \in \mathcal{I}$ tal que $|I| = |J| \implies$ existe un matching perfecto entre $I \setminus J$ y $J \setminus I$ en $G(\mathcal{I}, S, I)$*

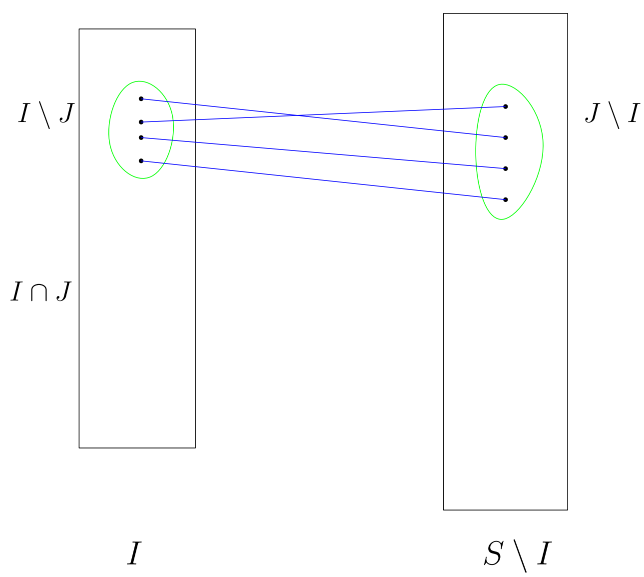

Figura 5: Ilustración del resultado.

Demostración. Sea H el subgrafo inducido por $I \setminus J \cup J \setminus I$. Supongamos por contradicción que H no tiene matching perfecto, entonces por el teorema de Hall, se tiene que $\exists K \subseteq J \setminus I : \ |N_H K| < |K|$.

Notar que dado $I, J \in \mathcal{I}$, se tiene que:

- $(I \cap J) \cup N_H(K) \in \mathcal{I}$
- $(I \cap J) \cup K \in \mathcal{I}$
- $|(I \cap J) \cup N_H(K)| < |(I \cap J) \cup K|$

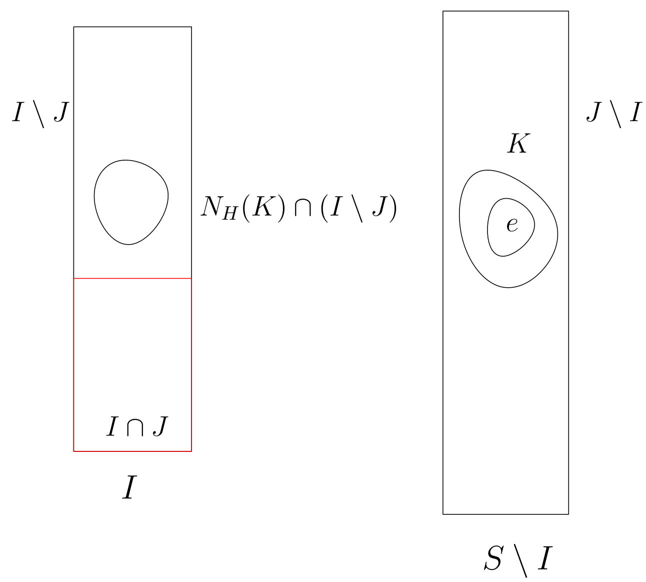

Figura 6: Aplicación de aumento en la matroide correspondiente.

Luego, por aumento $\exists e \in K$ tal que $(I \cap J) \cup N_H(K) + e \in \mathcal{I}$.

■

Observación 4. *La demostración continuará en la cátedra siguiente.*