**MA3705. Algoritmos Combinatoriales. 2014.**
**Profesor:** José Soto
**Escriba:** Manuel Cáceres.
**Fecha:** 17 de Octubre 2014 .

# Cátedra 19

## 1. Previo

En la clase pasada se vio:

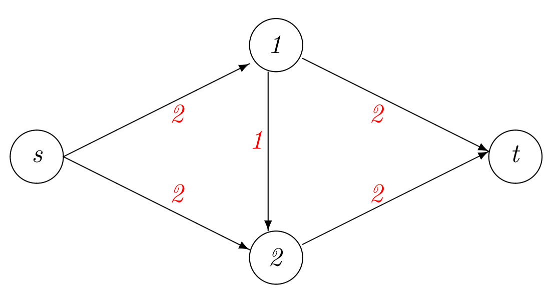
- $(G, u, s, t)$ es una red, donde:
  - $G = (V, E)$ digrafo.
  - $u : E \to \mathbb{R}^+$, función de capacidad.
  - $s \in V$, nodo de origen.
  - $f \in V$, nodo destino.
- $f^{IN}(v) = f(\delta^-(v)) - f(\delta^+(v))$.
- $f^{OUT}(v) = -f^{IN}(v)$.
- $valor(f) = f^{IN}(t) = f^{OUT}(s)$.
- $f$ flujo factible si $f^{IN}(v) = 0$ para todo $v \in V \setminus \{s, t\}$ y además $0 \leq f \leq u$.
- $S \subseteq V$ es un $s$-$t$ corte si $s \in S$ y $t \in V \setminus S$.
- (Dualidad débil)
$$\max_{f \text{ flujo factible}} valor(f) \leq \min_{S \ s\text{-}t \text{ corte}} u(\delta^+(S))$$

El problema consistía en encontrar un flujo factible de mayor valor. Este se podía resolver con el siguiente programa lineal:

$$\begin{aligned} \max\ & f^{IN}(t) \\ s.a\ & f = 0 \ , \forall v \in V \setminus \{s, t\} \\ & 0 \leq f_e \leq u_e \ , \forall e \in E, \end{aligned}$$

pero se buscará un algoritmo combinatorial que lo resuelva.

**Ejemplo 1.** *Sea el digrafo :*



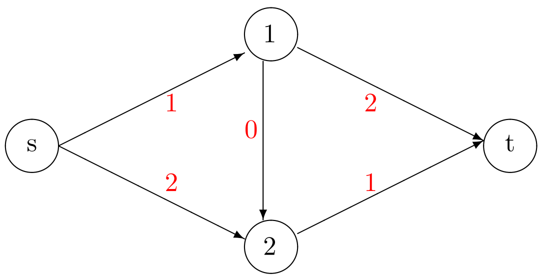

*donde se etiquetan los arcos con sus capacidades.*

## Idea básica

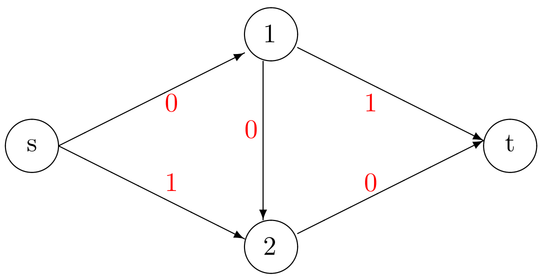
Encontrar un s-t camino por el cual podemos enviar más flujo del que actualmente mandamos, actualizar la función de flujo y repetir el procedimiento anterior.

### Problema

- Supongamos que el primer st camino que encontramos es $s \to 1 \to 2 \to t$, por donde mandamos uno de flujo (el máximo de las capacidades de los arcos del camino).
- Luego nuestro grafo queda :




  donde se etiquetan los arcos con las capacidades menos el flujo enviado hasta el momento.
- Después repetimos el proceso, donde encontramos los st dicaminos :
  - $s \to 1 \to t$, por donde enviamos uno de flujo.
  - $s \to 2 \to t$, por donde enviamos uno de flujo.
- Quedando finalmente con el grafo :




  al cual no se le puede aumentar su valor usando el algoritmo (pues no hay st camino por donde pueda enviar flujo).

Así nuestro algoritmo básico encuentra un flujo de valor 3, el cual no es óptimo, pues se podría haber mandado dos unidades de flujo por $s \to 1 \to t$ y dos por $s \to 2 \to t$, obteniendo un flujo de valor 4.

## Idea mejor

Complementar lo anterior con la posibilidad de "devolver" flujo[1].
Esta idea, se traduce en usar arcos "hacia adelante", cuya "capacidad residual" sea $u_e - f_e$ (que representa el flujo que aún se puede mandar por ese arco), y arcos "hacia atrás" con capacidad residual $f_e$ (que representa el flujo que podría ser "devuelto" por este arco).

Para continuar necesitaremos formalizar esta idea :

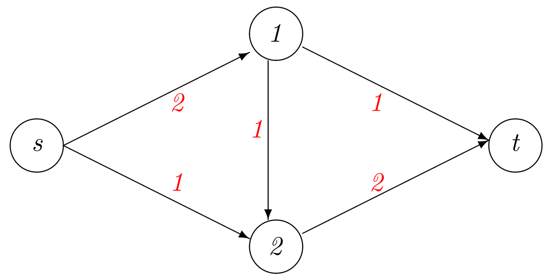
[1] En el ejemplo esto sería devolver el flujo del arco $1 \to 2$ para mandarlo por $1 \to t$ , y así alcanzar el óptimo.

**Definición 1. (RED RESIDUAL)**

Dado f, flujo factible en la red $(G, u, s, t)$, se construye la red residual $(G^f, u^f, s, t)$,donde :

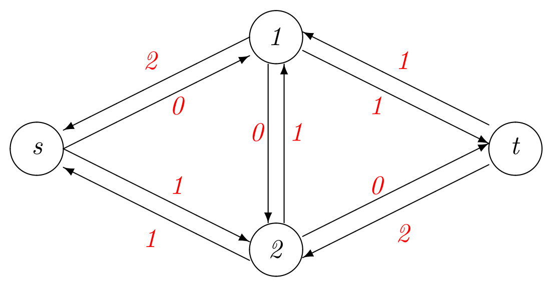
- $G^f = (V, E \cup \overleftarrow{E})$, $\overleftarrow{E} = \{\overleftarrow{e} : e \in E\}$, con $\overleftarrow{e}$, arco antiparalelo a $e$.[2]
- $\forall e \in E(G^f), u_e^f = \begin{cases} u_e - f_e & \text{si} \quad e \in E(G) \\ f_a & \text{si} \quad e = \overleftarrow{a} \in \overleftarrow{E}(G) \end{cases}$

**Ejemplo 2.** *Si G es nuestro grafo del ejemplo anterior, y f la obtenida al aplicar la "Idea básica".*




*donde las etiquedas de los arcos ahora representan la función de flujo.*

*Entonces su red residual sería:*




**Observación 1.** *Informalmente, lo que nos gustaría hacer es empujar uno de flujo en $s \to 2$, devolver uno en $1 \to 2$ y empujar otro en $1 \to t$, lo que se podría hacer es encontrar un dicamino en el grafo residual, cuyos arcos tengan pesos positivos. Veremos a continuación que esto se tiene de un modo un poco más general.*

**Lema 1.** *Sea $f$ un flujo factible en $(G, u, s, t)$.*
*Si $g : E(G^f) \to \mathbb{R}$ es un flujo factible en la red residual $(G^f, u^f, s, t)$.*
*Definimos $\bar{g}\colon E \to \mathbb{R}$ como*

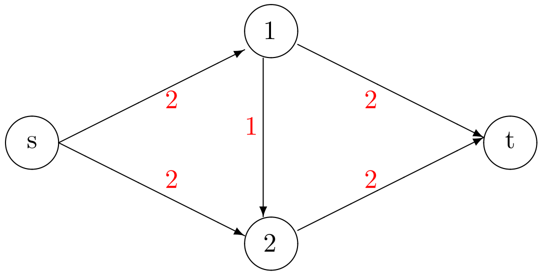
$$\bar{g}(e) = g(e) - g(\overleftarrow{e}).$$

*Entonces $f + \bar{g}$ es flujo factible en $(G, u, s, t)$ de valor : $valor(f) + valor_{G^f}(g)$.*

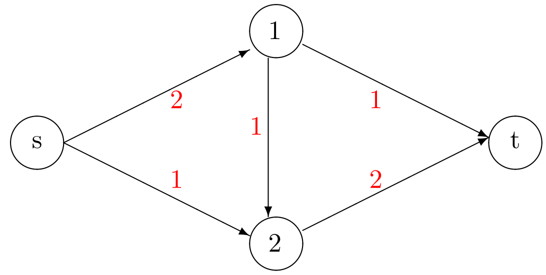
Antes de ir a la desmostración veamos que significa lo anterior gráficamente :

[2]Notar que para cada arco se adjunta el arco reverso, incluso si ya existe otro arco que conecte los mismos nodos en ese sentido.

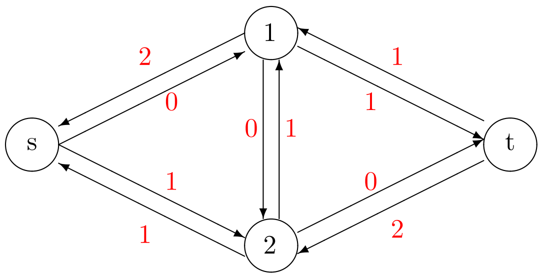
1. Grafo G con $u$ como etiquetas



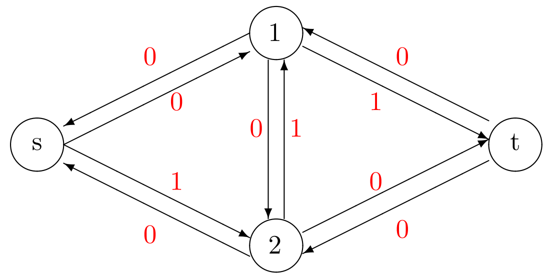

2. Grafo G con $f$ como etiquetas



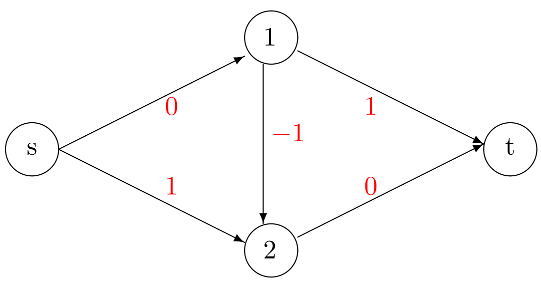

3. Grafo $G^f$ con $u^f$ como etiquetas



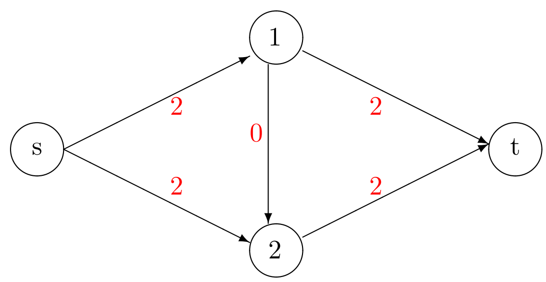

4. Grafo $G^f$ con $g$ como etiquetas[3]




5. Grafo G con $\bar{g}$ como etiquetas




6. Grafo G con $f + \bar{g}$ como etiquetas




**Demostración** Notar que

$$\begin{aligned} \bar{g}^{IN}(v) &= \bar{g}(\delta^-_E(v)) - \bar{g}(\delta^+_E(v)) \\ &= g(\delta^-_E(v)) - g(\delta^+_{\overleftarrow{E}}(v)) - g(\delta^+_E(v)) + g(\delta^-_{\overleftarrow{E}}(v)) \\ &= g(\delta^-_{E(G^f)}(v)) - g(\delta^+_{E(G^f)}(v)) = g^{IN}_{(G^f)}(v). \end{aligned}$$

Luego:

$$(f+\bar{g})^{IN}(v) = f^{IN}(v) + g^{IN}(v)_{G^f} = \begin{cases} 0 & v \notin \{s,t\} \\ valor(f) + valor_{G^f}(g) & v = s \\ -valor(f) - valor_{G^f}(g) & v = t \end{cases}$$

En particular $f+\bar{g}$ es flujo en $(G,u,s,t)$. Por otro lado, $f(e)+\bar{g}(e) = f(e)+g(e)-g(\overleftarrow{e}) \leq f(e)+(u(e)-f(e))-0 = u(e)$, y $f(e)+\bar{g}(e) = f(e)+g(e)-g(\overleftarrow{e}) \geq f(e)+0+-f(e) = 0$.

Lo que dice que $f+\bar{g}$ es factible. ■

Diremos que $f+\bar{g}$ se obtiene aumentando f con el flujo residual g.

[3] Notar que este flujo en particular es un ”camino”.

Para el caso particular en que $P$ es un $(s,t)$-camino en $G^f$, definimos :

- $u^f_P = \min\limits_{e \in P} u^f_e$ (capacidad residual de P).
- $\chi^P : E(G^f) \to \{0,1\}$, tal que $\chi^P_e = 1 \Leftrightarrow e \in P$ (vector indicatriz).

Si la capacidad residual es positiva, el camino $P$ se dice **aumentante** para f.
Notar que el vector $u^f_P \chi^P$ es un flujo factible en la red residual.[4] Luego por el lema anterior.

$$f + \overline{u^f_P \chi^P}$$

es flujo factible en la red original, de valor igual a $valor(f) + u^f_P$.

Notemos como consecuencia de este lema que para ver si se puede aumentar el flujo $f$, basta buscar un $(s,t)$-camino en $G^f$ que tenga capacidades positivas. Eso se puede lograr quitando los arcos de capacidad 0 de $G^f$ : llamaremos el grafo obtenido $G^f_+$. Basta ahora buscar un $(s,t)$-camino en $G^f_+$, ocupando por ejemplo BFS o DFS.
Ahora se puede presentar un algoritmo para encontrar un flujo máximo en una red : el algoritmo de Ford y Fulkerson.

# Algoritmo de Ford-Fulkerson

La búsqueda de tal algoritmo empezó durante la segunda guerra mundial por razones militares. Uno de los ejércitos estaba recibiendo armas tras una red de puentes, el enemigo buscó cual era la mínima cantidad de puentes a destruir para impedir la llegada del armamiento.

**Algoritmo 1:** Algoritmo de Ford-Fulkerson

**Entrada:** $(G,u,s,t), red.$
$f \leftarrow 0$(flujo 0)
Construir red residual $(G^f, u^f, s, t)$
**while** $\exists P$*, st camino aumentante para* $f$ **do**
  $f \leftarrow f + \overline{u^f_P \chi^P}$
  Actualizar $(G^f, u^f, s, t)$
**end**
**return** $f$

**Lema 2.** *No hay caminos aumentantes para $f \Leftrightarrow f$ es flujo máximo.*

**Demostración**
$\Rightarrow$ : Si existe un camino aumentante $P$ en $G^f$, entonces $f + \overline{u^f_P \chi^P}$ es un flujo factible con mayor valor.
$\Leftarrow$ : Supongamos que no existen caminos aumentantes, es decir que $G^f_+$ no tiene $(s,t)$-caminos. Llamemos $S$ el conjunto de los nodos alcanzables desde $s$ en $G^f_+$, notemos que $s \in S, t \notin S$, por lo que S es un st corte.
Vamos a calcular la capacidad de $S$, $u(\delta^+(S))$.
Sea $e = ab \in \delta(S)$.

- Si $e \in \delta^+(S), u^f_e = u_e - f_e$ en $G^f$. Si tuvieramos $u^f_e > 0$, tendriamos $e \in E(G^f_+)$ y como $a \in S$, tendríamos $b \in S$, contradicción. Entonces $u^f_e = 0$ y $u_e = f_e$ de lo que deducimos $u(\delta^+(S)) = f(\delta^+(S))$.
- Si $ab = e \in \delta^-(S), u^f_{\overleftarrow{e}} = f_e$. Si tuvieramos $ba = \overleftarrow{e} \in E(G^f_+)$ tendriamos que $b \in S$ implica $a \in S$ lo que es una contradicción. Entonces $u^f_{\overleftarrow{e}} = 0$ entonces $f_e = 0$, y $u(\delta^-(S)) = 0$.

Se tiene entonces por conservación de flujo que $valor(f) = f(\delta^+(S)) - f(\delta^-(S)) = u(\delta^+(S)) - 0 = u(\delta^+(S))$. Además, sabemos por dualidad débil que para cada flujo $f'$ y cada $s$-$t$ corte $S'$ se tiene $valor(f') \leq u(\delta^+(S))$. Como se tiene la igualdad para $f$ y $S$, $f$ es flujo máximo y $S$ es corte de capacidad mínima. ■

[4] Pues $\forall e \in P, u^f_P \chi^P_e = u^f_P c \leq u^f_e$ y $\forall e \notin P, u^f_P \chi^P_e = 0 \leq u^f_e$.

**Observación 2.** *En dualidad débil para flujos y st cortes vimos,*

$$\max_{f \text{ flujo factible}} valor(f) \leq \min_{S \text{ st corte}} u(\delta^+(S)),$$

*pero no justificamos por qué el lado de la izquierda era un máximo (y no sólo un supremo), y es pues f es un flujo factible si* $f^{IN}(v) = 0,\ \forall v \in V \setminus \{s,t\}, y\ 0 \leq f \leq u$, *que forma un polítopo acotado(por lo tanto compacto), luego como f es continua, alcanza su máximo.*

**Teorema 1** (Flujo máximo y corte mínimo)**.** *Para cada red* $(G, u, s, t)$ *se tiene*

$$\max_{f \text{ flujo factible}} valor(f) = \min_{S \text{ st corte}} u(\delta^+(S))$$

*Además* $S$ *se puede encontrar buscando el conjunto de los nodos alcanzables desde* $s$ *en* $G^f_+$.

**Observación 3.** *Acerca del algoritmo de Ford-Fulkerson*

- *Teorema de integralidad de flujo máximo: Si las capacidades son enteras, es decir* $u\colon E \to \mathbb{R}_+$ *y además el flujo máximo es finito, entonces existe un flujo* $f$ *con coordenadas enteras. (demo: El algoritmo de Ford y Fulkerson mantiene la integralidad de* $f$ *y en cada iteración el valor del flujo aumenta en al menos una unidad, luego el algoritmo termina).*
- *Se puede probar, amplificando, que si las capacidades son racionales entonces el algoritmo de Ford y Fulkerson termina.*
- *En el caso de capacidades irracionales, es posible que no termine.*
- *De hecho, es posible que el valor límite del flujo construido sea estrictamente menor que el valor de un flujo óptimo.*