MA3705. Algoritmos Combinatoriales 2014.
Profesor: José Soto

Problemas Controlables (parte 3).

Problema 18. Sea $G = (V, E)$ un grafo y sea $L \subseteq V$.

1. Diseñe un algoritmo basado en intersección de matroides que determine si existe un árbol generador T de G tal que todos los vértices de L sean hojas de T.
2. Inspirándose en las matroides que usó antes, diseñe un nuevo algoritmo basado mucho más simple que resuelva el problema anterior. ¿Cuál es la mejor complejidad que puede lograr?

Problema 19.
En clase auxiliar usted vio que el teorema de intersección de matroides implica el siguiente resultado:

Teorema 1 (Unión de matroides)**.** *Si $M_1 = (S_1, \mathcal{I}_1)$ y $M_2 = (S_2, \mathcal{I}_2)$ son matroides entonces $M_1 \vee M_2 = (S := S_1 \cup S_2, \{X \cup Y : X \in \mathcal{I}_1, Y \in \mathcal{I}_2)$ es una matroide con función de rango*

$$r_{1,2}(U) = \min_{Z \subseteq U} |U \setminus Z| + r_1(Z \cap S_1) + r_2(Z \cap S_2).$$

(a) Sea $M = (S, \mathcal{I})$ una matroide con función de rango $r(\cdot)$ y k un número entero. Demuestre, usando el teorema anterior, que el tamaño máximo de un conjunto $X \subseteq S$ que puede ser particionado en k conjuntos independientes en la matroide M es igual a
$$\min_{U \subseteq S} (|S \setminus U| + k \cdot r(U)).$$
Indicación: Aplique inductivamente el resultado anterior a k uniones de la matroide M.

(b) Demuestre el teorema de empaquetamiento de bases siguiente. Sea $M = (S, \mathcal{I})$ una matroide con función de rango $r(\cdot)$ y k un número entero. Demuestre que M contiene k bases disjuntas si y solo si
$$k(r(S) - r(U)) \leq |S \setminus U|, \quad \forall U \subseteq S.$$

(c) Concluya el siguiente resultado de Nash-Williams-Tutte:

Sea $G = (V, E)$ un grafo y $\mathcal{P} = (V_1, V_2, \ldots, V_p)$ una partición de V (en partes no vacías). Llamamos $\delta(\mathcal{P}) = \delta(V_1, V_2, \ldots, V_p)$ al conjunto de aristas e tal que ambos extremos de e están en partes distintas de $\mathcal{P}$. Llamamos $|\mathcal{P}| = p$ al número de partes de $\mathcal{P}$.

Teorema 2. *Sea $k \in \mathbb{N}$, G posee k árboles generadores arista-disjuntos si y solo si para toda partición $\mathcal{P}$ de V,*
$$|\delta(\mathcal{P})| \geq k(|\mathcal{P}| - 1).$$

Problema 20. Considere el siguiente problema de flujos con capacidad en los **nodos** y múltiples fuentes y destinos:

1. Dado un digrafo $G = (V, E)$, un nodo origen s, un nodo destino t y una función $n \colon V \setminus \{s, t\} \to \mathbb{R}_+$ de capacidad en los nodos; encontrar un s-t flujo de valor máximo tal que el flujo que pasa por cualquier nodo $v \in V \setminus \{s, t\}$ es a lo más $n(v)$. (El flujo que pasa por un nodo es $f(\delta^-(v))$ o bien $f(\delta^+(v))$).

   Reduzca el problema anterior a un problema de flujo máximo en redes.
   Indicación: Construya un digrafo auxiliar $G' = (V', E')$ donde cada vértice v de V corresponda a dos vértices v_{in} y v_{out} en V'. El digrafi auxiliar debería tener una arco e' para cada arco e de E así como arcos auxiliares.

2. Sea $G = (V, E)$ un digrafo y sean $S, T \subseteq V$ dos conjuntos disjuntos de nodos. Sea además una función $u \colon E \to \mathbb{R}_+$ una función de capacidad en los arcos. Usted quiere mandar la mayor cantidad de flujo desde los nodos $s \in S$ a los nodos $t \in T$ (es decir, quiere maximizar la cantidad de flujo que sale desde S o entra a T). Reduzca este problema al de un problema de flujo máximo en redes con fuente y destino único.

Problema 21. [Teoremas de Menger].
Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido, y s y t dos vértices distintos de V. Dos s-t dicaminos P_1, P_2 se dicen *arco-disjuntos* si $E(P_1) \cap E(P_2) = \emptyset$. Dos s-t dicaminos P_1, P_2 se dicen *internamente disjuntos* si $V(P_1) \cap V(P_2) = \{s, t\}$.
Un *s-t corte* es un conjunto $S \subseteq V$ tal que $s \in S$ y $t \notin S$. Un *s-t separador* es un conjunto $S \subseteq V - \{s, t\}$ tal que t no es alcanzable desde s en $G \setminus S$.

(a) Demuestre que los teoremas siguientes son equivalentes (es decir, muestre como deducir uno a partir de otro).

   I Suponga que s y t no son adyacentes. Entonces el número máximo de s-t dicaminos internamente disjuntos par a par es igual al tamaño mínimo de un s-t separador.

   II Sean s y t arbitrarios. Entonces el número máximo de s-t dicaminos arco-disjuntos par a par es igual al número mínimo de arcos de un s-t corte.

(b) Use el teorema de flujo máximo, corte mínimo, y el teorema descomposición de flujos para demostrar los teoremas de Menger (demuestre cualquiera de los dos ya que en la parte anterior probó que son equivalentes).

Problema 22. Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido y conexo. Un *corte de aristas* es un conjunto $F \subseteq E$ de aristas tal que $G \setminus F$ es disconexo. Un *corte de vértices* (o "corte" a secas) es un conjunto de vértices S tal que $\delta(S)$ es un corte por aristas de G (es decir cualquier conjunto $S \notin \{\emptyset, V\}$)
Suponga que $u \colon E \to \mathbb{R}_+$ es una función de capacidades en las aristas no negativas.

- Demuestre que para todo corte por aristas F existe un corte $S \subseteq V$ tal que $u(F) \geq u(\delta(S))$ y deduzca que existe un corte por aristas de capacidad mínima que además es corte por vértices (éste es llamado *corte mínimo global de G*).
- Mediante un ejemplo muestre que lo anterior no es válido si se permiten capacidades negativas.
- Un grafo no dirigido H se dice k-arista-conexo si entre cada par de vértices v y w, existen al menos k v-w caminos disjuntos por aristas. El valor *máximo* de k tal que H es k-arista-conexo se conoce como la *conectividad por aristas* de G. Diseñe un algoritmo que calcule la conectividad por aristas de H (si H no es conexo, entonces la conectividad es 0).

Problema 23.[Flujos unitarios]
Sea (G, u, s, t) una red tal que $u(e) \in \{0, 1\}$ para todo $e \in E$ (estas redes se llaman *unitarias*).

(a) ¿Cuál es la complejidad del algoritmo genérico de Ford y Fulkerson para encontrar un flujo máximo en G? ¿Y las de las variantes de Edmonds y Karp? ¿Cual algoritmo conviene usar?

Definamos un *flujo bloqueador* de una red unitaria (G, u, s, t) como un flujo f donde todo s-t camino en G tiene algun arco con flujo unitario (i.e., el arco está saturado). Notar que un flujo bloqueador no es necesariamente un flujo máximo.

El siguiente algoritmo permite encontrar un flujo bloqueador de una red unitaria (no necesita demostrarlo). Parta del flujo vacio $f = 0$. Construya un s-t camino en $G_+ = (V, \{e \in E : u(e) = 1\})$ del siguiente modo. Parta de s. Si está en un nodo que todavía tiene arcos de salida, avance por uno de ellos y agreguelo a su camino. Si llega a un nodo sin salida, retroceda el último arco, y elimine este arco de la red y de su camino. Si llega a t, aumente f con el s-t camino encontrado y retroceda hasta s borrando todos los arcos de la red. Realice esto hasta que s quede sin arcos de salida. Es fácil ver que el algoritmo anterior tiene una complejidad de $O(m)$, pues cada arco es "visitado" a lo más dos veces. Usaremos este algoritmo para encontrar flujos máximos de manera más eficiente.

(b) Sea (G, u, s, t) una red unitaria y sea f un flujo bloqueador. Muestre que la distancia de s a t en G_+ es estrictamente menor que la distancia de s a t en G_+^f. (**Indicación:** Inspírese en la demostración de Edmonds-Karp sobre como las distancias no decrecen al aumentar sobre un camino mínimo).

(c) Sea (G, u, s, t) una red unitaria y suponga que la distancia de s a t en G_+ es d. Usando integralidad del flujo máximo y teorema de descomposición de flujos pruebe que el flujo máximo en esta red es a lo más m/d.

(d) Considere el siguiente algoritmo. Parta del flujo vacío $f = 0$. Mientras exista un s-t camino en G_+^f. Encontrar un flujo bloqueador g de (G^f, u^f, s, t) (notar que esta red es unitaria) y reemplazar f con $f + \bar{g}$ (es decir "aumentar f con g").

Mostrar que la complejidad de este algoritmo es a lo más $O(m^{3/2})$. **Indicación:** ¿Cuan grande puede ser el flujo residual máximo después de k iteraciones? (use la parte (c) para esto). Note además que en cada iteración posterior el flujo máximo se reduce en una unidad. Eligiendo k adecuado, concluya.

Problema 24. Sea $f : 2^S \to \mathbb{R}$.

a) Demuestre que f es submodular si y solo si satisface la siguiente condicion de retornos decrecientes

$$\forall X \subseteq Y, e \notin Y,\ f(Y + e) - f(Y) \leq f(X + e) - f(X).$$

b) Demuestre que si f es modular en S, entonces existen valores $(f_x)_{x \in S}$ tal que

$$\forall X \subseteq S,\ f(X) = f(\emptyset) + \sum_{x \in X} f_x.$$

c) Determine si son modulares, submodulares o supermodulares las siguientes funciones:

- La función $cc : 2^E \to \mathbb{R}$, donde $cc(X)$ = número de componentes conexas del grafo (V, X) donde $G = (V, E)$ es un grafo dado.
- Dado un conjunto finito de eventos $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ en un espacio de probabilidad cualquiera, estudie la función $f : 2^{[k]} \to \mathbb{R}$ dada por $f(X) = \Pr(\bigwedge_{i \in X} A_i)$.
- Dada una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa (resp. cóncava) y una función $h : 2^V \to \mathbb{R}$ modular, analice la funcion $f : 2^V \to E$ dada por $f(X) = g(h(X))$.

d) Sea $f\colon 2^{[n]} \to \mathbb{R}$ una función sobre los subconjuntos de $[n]$. Definimos la extensión multilinear $\hat{f}$ de f como $\hat{f}\colon [0,1]^n \to \mathbb{R}$, $\hat{f}(x) = \mathbb{E}[f(X)]$ donde $X \subseteq [n]$ es el conjunto aleatorio dado por: $i \in X$ con probabilidad x_i de manera independiente.

   Demuestre que f es submodular si y solo si $\frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial x_i \partial x_j} \leq 0$, para todo i, $j \in [n]$.

   Nota: En general, $\hat{f}$ no es cóncava ni convexa. ¡Sin embargo, tiene todas sus segundas derivadas parciales principales no positivas!

Problema 25.

a) Sea V un conjunto finito y sea $f\colon 2^V \to \mathbb{R}$ una función. Sea Π una partición de V, es decir, $\Pi = \{V_i\colon i \in [k]\}$, $V_i \cap V_j = \emptyset$ si $i \neq j$, $V_i \neq \emptyset$, $\bigcup_{i\in[k]} V_i = V$. Además, dado $X \subseteq [k]$, definimos $V_X = \bigcup_{i\in X} V_i$.

   Se define la fusión de f asociada a Π como la función $f_\Pi\colon 2^{[k]} \to \mathbb{R}$ dada por $f_\Pi(X) = f(V_X)$, para todo $X \subseteq [k]$. Demuestre que si f es submodular entonces f_Π es submodular, y que si f es simétrica entonces f_Π también es simétrica.

b) Sea $f\colon 2^V \to \mathbb{R}$ submodular no necesariamente simétrica. Sea $\mathcal{M} = \arg\min_{\emptyset\subseteq X\subseteq V} f(X)$ el conjunto de los minimizadores de f en 2^V. Demuestre que si $A, B \in \mathcal{M}$ entonces $A \cap B$ y $A \cup B$ están en $\mathcal{M}$. Deduzca que existen a lo más $n = |V|$ conjuntos en $\mathcal{M}$ minimales para inclusión.