



## MA 3705 - Auxiliar 13

**Profesor:** José Soto S.

**Auxiliares:** Felipe Contreras S.      Abner Turkieltaub M.

30 de octubre, 2014

**P1.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo dirigido,  $w: V \rightarrow \mathbf{Q}^+$  una función no negativa en los nodos y  $\bar{w}: E \rightarrow \mathbf{Q}^+$  una función no negativa en los arcos. Se define la capacidad mixta  $\rho$  de un conjunto  $S \subseteq V$  como

$$\rho(S) = w(S) + \bar{w}(\delta^+(S)).$$

Un conjunto  $S^* \in \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset, V\}$  se dice **corte mixto mínimo global** de  $G$  si  $\rho(S^*)$  es mínimo. Deseamos encontrar un algoritmo para encontrar  $S^*$ . Para esto procedemos como sigue:

a) Sea  $(H, u, s, t)$  una red. Defina

$$\mathcal{C}(H, s, t) = \{S \subseteq V(H) : s \in S, t \notin S, |V \setminus S| \geq 2, |S| \geq 2\}$$

como el conjunto de todos los  $s-t$  cortes que no dejan solos ni a  $t$  ni a  $s$ . Diseñe un algoritmo fuertemente polinomial para encontrar el corte  $S$  en  $\mathcal{C}(H, s, t)$  de capacidad  $u(\delta_H^+(S))$  mínima.

**Indicación:** Para todo  $S \in \mathcal{C}$  existen  $v_1$  y  $v_2$  en  $V(H) \setminus \{s, t\}$  tal que  $v_1 \in S$  y  $v_2 \in V(H) \setminus S$ . Separe el problema en  $O(|V(H)|^2)$  subproblemas distintos, dependiendo de  $v_1$  y  $v_2$ .

b) Construya una red auxiliar  $(H, u, s, t)$  de tal manera que la capacidad mixta mínima en el grafo  $G$  del principio del problema, corresponda al mínimo de  $u(\delta_H^+(S))$  sobre  $\mathcal{C}(H, s, t)$ .

c) Usando las partes anteriores, diseñe un algoritmo fuertemente polinomial para encontrar un corte mixto mínimo global de  $G$ . Determine la complejidad de su algoritmo.

**P2.** Sea  $G$  un grafo con conjunto de vértices  $[n]$ . Llamemos  $v[i, j]$  al valor del corte mínimo entre los vértices  $i$  y  $j$ . Demuestre que existen a lo más  $n-1$  valores distintos entre los  $\binom{n}{2}$  números  $v[i, j]$ ,  $i, j \in [n]$ .

**P3.** La arista-conectividad de un grafo  $G$  se define como la mínima cantidad de aristas que es necesario borrar para desconectar  $G$ . Encuentre un algoritmo polinomial que calcule la arista-conectividad de un grafo.