MA3705. Algoritmos Combinatoriales. 2014
Profesor: José Soto
Escriba(s): Pedro Espinoza , Felipe Salas y Juan José Granier
Fecha: 6 de Noviembre de 2014.

Cátedra 24

1. Recuerdo de la clase pasada

Definición.

1. Elipsoide. $E(p, A) = \left\{x \in \mathbb{R}^d : (x-p)^T A^{-1}(x-p)\right\}$. Donde A es una matriz semidefinida positiva.
2. Oráculo de separación para convexo $K \subseteq \mathbb{R}^d$: Oráculo que dado $x \in \mathbb{R}^d$ responde:
   - $x \in K$
   - $x \notin K$ y devuelve hiperplano c de separación; $c^T x < c^T y$, $\forall y \in K$

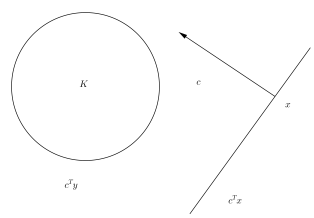


Figura 1: Hiperplano de separación

2. Método Elipsoide

2.1. Datos:

- Convexo $K \subseteq \mathbb{R}^d$ dado por oráculo de separación (polinomial)
- $B = B(a, R)$ tal que $K \subseteq B$
-
  - $\delta > 0$ tal que $K \neq \emptyset \Rightarrow Vol(K) > \delta$
  - o bien $r > 0$ tal que $K \neq \emptyset \Rightarrow \exists c \in K; B(c, r) \subseteq K$.

2.2. Output:

- $K = \emptyset$
- $K \neq \emptyset$ y devolver $x \in K$

2.3. Método:

$q \leftarrow a$ (centro);
$E \leftarrow B(q, r)$;
while $Vol(E) > \delta$ **do**
  Preguntar al oráculo si $q \in K$;
  if q *está en* K **then**
    Responder $q \in K$;
  end
  else
    Usar oráculo para encontrar hiperplano z tal que $z^T q < z^T y, \forall y \in K$;
    $E' \leftarrow$ el elipsoide de volumen mínimo que contiene $E \cap \{x : z^T x \leq z^T q\}$;
    $E \leftarrow E'$
  end
end
return "$K = \emptyset$"

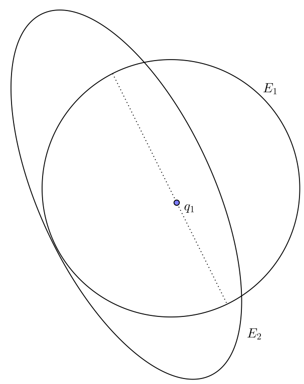


Figura 2: Segunda iteración del método.

Lema 1. *Dada* $E(q,A) \subseteq \mathbb{R}^d$*, tenemos que* $E(q,A) \cap \{x : z^T x \leq z^T q\} \subset E(q',A') = E'$.
Con $q' = q - \dfrac{b}{d+1}$*;* $A' = \dfrac{d^2}{d^2-1}\left(A - \dfrac{2}{d+1} b^T b\right)$*, donde* $b = \dfrac{Az}{\sqrt{z^T A z}}$*, y* $\dfrac{Vol(E')}{Vol(E)} \leq exp\left(\dfrac{-1}{2d}\right)$

Corolario 1. *La* $k-$*ésima elipsoide* E_k *encontrada por el método satisface* $\dfrac{Vol(E_k)}{Vol(E_0)} \leq exp\left(\dfrac{-k}{2d}\right)$ *(*E_0*:= Elipsoide inicial).*

Notar que $Vol(E_0) = \Theta(R^d)$. Luego, si queremos que $Vol(E_k) \leq \delta \sim r^d$, basta tomar k tal que $exp\left(\dfrac{-k}{2d}\right) = \Theta\left(\dfrac{r^d}{R^d}\right)$
$\Rightarrow \dfrac{k}{2d} \geq \Omega\left(d\left(ln\left(\dfrac{R}{r}\right)\right)\right)$, luego basta $k \geq \Omega\left(d^2 ln\left(\dfrac{R}{r}\right)\right)$.
En otras palabras, el método toma $O\left(d^2 ln\left(\dfrac{R}{r}\right)\right)$ iteraciones.

Observación. *En realidad, uno calcula aproximaciones de las elipsoides mínimas, el problema es la irracionalidad del método exacto, ya que al calcular b,* $\sqrt{z^T A z}$ *puede ser irracional.*

3. Método de la elipsoide para problemas de Optimización

Dado que el método original es sólo para la factibilidad, veremos dos técnicas para problemas de optimización.

3.1. Primera técnica.

Tenemos el problema de encontrar $max\{w^T x : x \in K\}$ donde K es dado por el oráculo de separación y satisface las hipótesis.

Si sabemos además que $a \leq w^T x \leq b, \forall x \in K$.

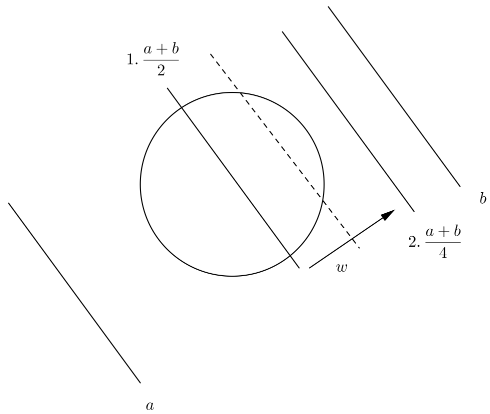


Figura 3: Nuestra busqueda sube una linea de nivel hasta dar con el ótimo.

Haciendo búsqueda binaria de a' en $[a,b]$ se puede encontrar un punto tan cercano al óptimo como queramos. Los problemas de esta técnica son: la irracionalidad del óptimo y que para llegar al verdadero óptimo, debemos llegar a $K \cap \{a^* \leq w^T x\}$, que tiene volumen 0.

3.2. Segunda técnica.

Esta técnica es específica para programas lineales.
Toda solución óptima del primal tiene una solución dual asociada, de la forma

$$\begin{array}{ccc} \text{máx} \quad c^T x & & \text{mín} \quad b^T y \\ sa.\ Ax \leq b & = & sa.\ A^T y \geq c \\ x \geq 0 & & y \geq 0 \end{array}$$

Cambiamos al problema de factibilidad:

$$K = \{(x,y) \ : \ Ax \leq b, x \geq 0, A^T y \geq c, y \geq 0, c^T x = b^T y\}$$

Los óptimos del problema lineal están en el convexo K, pero K (normalmente) no tiene volumen, luego definimos:

$$K_\varepsilon = \{(x,y) \ : \ Ax \leq b, x \geq 0, A^T y \geq c, y \geq 0, c^T x \leq b^T y + \varepsilon\}$$

Se buscan iterativamente soluciones $(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in K_\varepsilon$, hasta tener la presición deseada.

Caso Particular. Optimización en poliedros $\{0,1\}$.
Estos poliedros son aquellos cuyos vértices tienen coordenadas en $\{0,1\}^d$.

Ejemplo. Dado G grafo bipartito, definimos $P_{\text{Matching}}(G) = \{x \in \mathbb{R}^E : x(\delta(v)) \leq 1, x \geq 0\} = conv\{\chi^M : M \text{ matching}\}$
Todos los vértices viven en $\{0,1\}^{|E|}$.

Sea P polítopo con vértices en $\{0,1\}^d$ de dimensión completa (no todos los vértices están en el mismo plano).
$P = conv(S)$, con $S \subseteq \{0,1\}^d$. Sea $w \in \mathbb{Z}^d$ función de pesos.

Teorema 1. *Podemos resolver* $\text{mín}\{w^T x : x \in P\}$ *en* $O(d^3 log(d||w||_\infty))$ *iteraciones y llamadas a un oráculo para* P.

Del teorema anterior surgen un par de preguntas; ¿Cuál es la factibilidad de P?,¿Cómo comprbar si $P \neq \emptyset$?

Necesitamos:

1. Bola que contenga a P:

$$P \subseteq B\left(\underbrace{\left(\frac{1}{2},...,\frac{1}{2}\right)}_{d veces};\frac{\sqrt{d}}{2}\right)$$

2. Volumen mínimo: Si $P \neq \emptyset$ tiene dimensión completa, $\exists v_0, v_1, ..., v_d \in S$ afínmente independientes (no todos en elmismo hiperplano, $i.e. \{(v_i - v_0)\}_{i=1}^d$ son $l.i$) tal que $conv(\{v_0,...,v_d\}) \subseteq P$
$vol(conv\{(v_0,...,v_d)\}) = \dfrac{1}{d!}Vol(\text{Paralelepípedo generado por } (v_i - v_0)_{i=1}^d) = \dfrac{1}{d!}\prod_{i=1,i>j}^d ||v_i - v_j||_2^2 \geq \dfrac{1}{d!}$

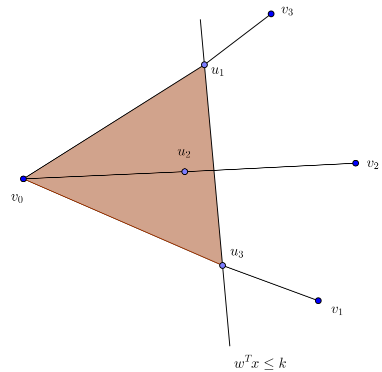
Luego, se puede revisar factibilidad en P en $O\left(d^2 log\dfrac{R}{r}\right) = O\left(d^2 log\left(\dfrac{\sqrt{d}/2}{\sqrt[d]{\frac{1}{d!}}}\right)\right) = O(d^2 log(d\sqrt[d]{d!})) = O(d^2 log(d))$.

Para optimizar, definamos $P_k = P \bigcap \{w^T x \leq k + \dfrac{1}{2}\}$, con $k \in \mathbb{Z}$.
Para ver la factibilidad de P_k; necesitamos cota inferior para el volumen de todas maneras. Si $P_k \neq \emptyset$, entonces contiene al menos un vértice de coordenadas enteras en S, llamémoslo v_0.
Sean $v_1, ..., v_d \in S$ tal que $v_0, ..., v_d$ son afínmente independientes.

Definamos:

$$u_i = \begin{cases} v_i & \text{si } v_i \in P_k \\ v_0 + \varepsilon(v_i - v_0) & \text{si } v_i \notin P_k \end{cases} \quad \text{donde} \quad \varepsilon = \left(\frac{1}{4||w||_\infty d}\right)$$

A continuación un dibujo que ilustra la construcción que hemos hecho



Veamos que $u_i \in P_k$:
Notar que si $v_i \in P_k \Rightarrow u_i \in P_k$
Por otro lado, si $u_i \notin P_k$, entonces $w^T u_i > k + 1/2$
$\Rightarrow w^T u_i = w^T v_0 + \varepsilon w^T (v_i - v_0) \leq k + \dfrac{1}{4||w||_\infty d} 2||w||_\infty d \leq k + \dfrac{1}{2}$
$\Rightarrow u_i \in P_k$

Observación. *Las coordenadas de w están en $(-||w||_\infty, ||w||_\infty)$; y las de $(v_i - v_0)$ están en $\{-1,1\}$*

Luego, $Vol(P_k) \geq Vol(conv(u_0,...,u_d)) \geq Vol(con(v_0,...,v_d))\varepsilon^d = \dfrac{1}{d!}\left(\dfrac{1}{4||w||_\infty d}\right)^d$.

Por lo tanto, revisar factibilidad en P_k toma:

$$O\left(d^2 log\left(\frac{\frac{\sqrt{d}}{2}}{\sqrt[d]{\frac{1}{d!}}} 4||w||_\infty d\right)\right) = O(d^2 log(||w||_\infty d))$$