MA3705. Algoritmos Combinatoriales 2014.
Profesor: José Soto

Problemas Controlables (parte 4).

Problema 26. k-centros y conjuntos dominantes.

(a) Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido completo, y $d\colon E \to \mathbb{Q}$ una función no negativa que satisface la desigualdad triangular (una distancia, con la excepción que algunas aristas podrían tener $d(e) = 0$). Para $v \in V$ y $r > 0$, la bola de centro v y radio r, está dada por $B(v, r) = \{w \in V : d(wv) \le r\}$. Dado un conjunto S, el *radio cubridor* de S es el mínimo valor r_S tal que $V = \bigcup_{v\in S} B(v, r_S)$. Los vértices de S se denominan centros y las bolas $B(v, r_S)$ con $v \in S$ se denominan *clusters*.

El problema de los k-centros es el siguiente.

Entrada: Grafo G, función d y entero k.
Salida: Conjunto $S \subseteq V$ de tamaño igual a k de mínimo radio cubridor.

Considere el siguiente algoritmo glotón para encontrar un S. Elegir el primer centro $v \in S$ de manera arbitraria. Mientras $|S| \le k$, agregar a S el vértice w *más lejano a* S, es decir aquel w que maximiza

$$d(w, S) := \min_{v\in S} d(w, v).$$

Demostrar que este algoritmo es una 2-aproximación para el problema de los k-centros.

Indicación: Sea OPT una solución óptima y sea S la solución encontrada por el algoritmo. Vea primero el caso donde todos cada centro de S está en un cluster distinto de OPT. Analice después el caso donde dos centros de S caen en el mismo cluster de OPT.

(b) Sea $G = (V, E)$ un grafo. Un conjunto $U \subseteq V$ se dice *dominante* si todo v que no está en U tiene un vecino en U. El problema de determinar un conjunto dominante de tamaño mínimo es NP-completo.

Demuestre, usando esto, que si existe un algoritmo polinomial de aproximación para el problema de los k-centros que garantice una α-aproximación, con $\alpha < 2$ entonces P = NP.
Indicación: Dado $H = (V, E)$ grafo considere la función de distancias para pares de vértices dada por

$$d(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } uv \in E, \\ 2 & \text{si } uv \notin E. \end{cases}$$

Problema 27. Vendedor viajero asimétrico

1. Sea $G = (V, E)$ un grafo **dirigido** completo, es decir $E = V \times V \setminus \{(v, v) : v \in V\}$) y $w\colon E \to \mathbb{R}_+$, una función de pesos. Note que no es necesario que $w(a, b) = w(b, a)$. El problema del vendedor viajero asimétrico (ATSP) consiste en encontrar un diciclo hamiltoniano (ciclo que pasa por todos los nodos) de peso mínimo.

   (a) Sea $F \subseteq E$ muestre que (V, F) es un diciclo hamiltoniano si y solo sí las siguientes condiciones se cumplen: el grado de entrada y el grado de salida de cada vértice es 1, y además, para todo conjunto $\emptyset \subsetneq U \subsetneq V$, $\delta_F(U)$ contiene al menos un arco. **Indicación:** Muestre, ya sea usando teoremas de Menger, o el teorema de flujo máximo-corte mínimo que la última condición equivale a que (V, F) es fuertemente conexo (es decir hay un camino dirigido desde todo vértice a a todo vértice b).

   (b) Usando lo anterior, modele el problema ATSP como un programa entero. En particular, demuestre que las soluciones factibles de su programa entero están en biyección con los diciclos hamiltonianos de G.

   (c) Demuestre que la relajación lineal problema anterior se puede resolver en tiempo polinomial.

Problema 28. Set-Cover

Sea V una familia de objetos y $\mathcal{S} \subseteq 2^V$ una familia de conjuntos tal que $\bigcup_{U \in \mathcal{S}} U = V$. Un cubrimiento por conjuntos (o *set-cover*) es una familia $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ tal que todo elemento de v está en algún conjunto en $\mathcal{T}$. Sea $w\colon \mathcal{S} \to \mathbb{R}_+$ una función de peso positiva en los conjuntos. Para cada $v \in V$, definimos la frecuencia de v como $f(v) = |\{U \in \mathcal{S} \colon v \in U\}|$. Sea además $f \colon = \max_v f(v)$.

a) Escriba un programa entero que resuelva set-cover de peso mínimo usando variables $x_U : U \in \mathcal{S}$ que indiquen si el conjunto U es elegido. Usando la misma idea usada en cátedra para vertex-cover, diseñe un algoritmo polinomial que sea una f-aproximación.

b) Considere ahora el algoritmo glotón siguiente: Sea $\mathcal{T} \leftarrow \emptyset$ que representa la familia de conjuntos elegidos hasta el momento. Sea además $N \leftarrow V$ que representa los objetos actualmente cubiertos por $\mathcal{T}$. Mientras N no sea vacío, agregue a $\mathcal{T}$ el conjunto $U \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{T}$ que minimiza la densidad residual $w(U)/|N \cap U|$ y actualice N. Demuestre que la familia devuelta es una $O(\log n)$-aproximación para set-cover de peso minimo.

   Indicación: Sean $U_1, \ldots, U_k$ a los conjuntos devueltos por el algoritmo, en el orden en el que fueron agregados a $\mathcal{T}$ y sea t_i la densidad residual de U_i en el momento de ser agregado. Para cada $v \in V$, defina $t(v)$ como t_i, donde i es el menor índice tal que $v \in U_i$. Muestre primero que $\sum_{i=1}^{k} w(U_k) = \sum_{v \in V} t(v)$. Numere los elementos de V como $v_1, \ldots, v_n$ en el orden en que fueron eliminados de N (rompiendo empates de manera arbitraria) y muestre que $t(v_i) \leq v(\mathrm{OPT})/(n-i+1)$. Concluya la demostración usando que el número harmónico $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \Theta(\log n)$.

Problema 29. Algoritmo aleatorio para corte mínimo

La aleatoridad no solo sirve para algoritmos de aproximación sino también puede servir para diseñar algoritmos exactos simples y eficientes. En este problema estudiaremos el algoritmo de Karger para corte mínimo global. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo y $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ una función de peso no negativa. Además, supondremos que $|V| \geq 2$.

Algorithm 1 Karger(G, w)

```
G' ← G.
while |V(G')| ≥ 3 do
    Elegir al azar una arista e ∈ E(G'), donde la probabilidad de elegir e es w(e')/w(E(G')).
    Contraer e en G' (fusionando sus extremos)
end while
Devolver el corte S obtenido al expandir cualquiera de los dos vértices de G'.
```

Para el análisis es más simple pensar en contracción de multigrafos sin loops (es decir, al contraer una arista uv, pueden aparecer varias aristas paralelas, las mantenemos separadas y solo eliminamos los loops que se formen). Note que cada vez que se realiza una contracción las únicas aristas que desaparecen son aquellas cuyos extremos fueron fusionados en el mismo vértice.

1. Fije el grafo G' en alguna etapa del algoritmo y sea S^* un corte mínimo de G'. Sea además e la arista elegida al azar en dicha etapa, G'_e el grafo obtenido al contraer e y S^*_e un corte mínimo de G'_e.

   Demuestre que siempre se tiene que $w(\delta_{G'}(S^*)) \leq w(\delta_{G'_e}(S^*_e))$ y además,

   $$\Pr_e[w(\delta_{G'}(S^*)) < w(\delta_{G'_e}(S^*_e))] \leq \Pr[e \in \delta_{G'}(S^*)] \leq \frac{2}{|V(G')|}.$$

   Para la última desigualdad, argumente que $w(\delta_{G'}(S^*)) \leq w(\delta_{G'}(u))$ para todo $u \in V(G')$ y calcule $w(E(G'))$ en función de los valores $\{w(\delta_{G'}(u))\}_{u \in V}$.

2. Concluya que la probabilidad que el corte devuelto por el algoritmo de Karger sea óptimo es al menos $\frac{2}{n(n-1)}$, donde $n = |V|$.

3. Suponga ahora que repite el algoritmo de Karker $n^2 \ln(n)$ veces y retorna el menor de los $n^2 \ln(n)$ cortes encontrados, concluya que este corte retornado es óptimo con probabilidad al menos $1 - 1/n$.