MA3705. Algoritmos Combinatoriales. 2014.
Profesor: José Soto
Escriba(s): Mauricio Campos, Juan Marshall, Martín Ríos, Piero Zanocco.
Fecha: 17 de Noviembre de 2014.

Cátedra 27

1. Recuerdo

Estábamos estudiando las clases de problemas de optimización combinatorial. Entre estas, definimos las siguientes:

Definición 1 (*Clase P*)**.** Son aquellos problemas de maximización, donde encontrar solución factible de peso al menos un valor dado es polinomial.

Definición 2 (*Clase NP*)**.** Son aquellos problemas de maximización, donde verificar si un conjunto X es solución factible de peso al menos un valor dado es polinomial.

A partir de estas definiciones, nos preguntamos si un problema de optimización, que puede verificarse en tiempo polinomial, admite una solución factible que pueda ser encontrada en tiempo polinomial. Es decir, ¿es $NP = P$?.
Para abordar esta pregunta, requerimos definir algunos conceptos:

Definición 3 (*Reducción (Turing)*)**.** Se dice que un problema A se reduce a un problema B,

$$A \leq_P^T B,$$

si podemos resolver A en tiempo polinomial usando como rutina un oráculo que resuelva B.

Definición 4 (*Clase NP-difícil*)**.** Un problema Q se dice NP-difícil si para todo problema X de NP se tiene que:

$$X \leq_P^T Q$$

Definición 5 (*Clase NP-completo*)**.** Un problema Q se dice NP-completo si es NP-difícil y está en NP.

Nos preguntamos entonces sobre la existencia de problemas NP-completos. En 1971, Stephen Cook resuelve este problema mediante el siguiente resultado:

Teorema 1 (*Cook-Levin*)**.** ***SAT*** *es NP-completo, donde:*

SAT*: Dado $\phi(x)$ booleana, determinar si existe x tal que $\phi(x)$.*

2. Problemas NP-completos

Obs 1. Karp (1971) dió una lista de 21 problemas NP-completos. Entre ellos se encuentran los siguientes:

- Clique (subgrafo en que cada vértice está conectado a cada otro vértice del grafo) de tamaño máximo.
- Conjunto independiente de tamaño máximo.
- Corte de cardinalidad máxima.
- Encontrar cubrimiento por vértices en grafos no bipartitos.
- Existencia de un ciclo Hamiltoniano (ciclo que pasa por todos los vértices del grafo).

¿Cómo probamos que un problema Q es NP-completo?

1. $Q \in NP$
2. Encontrar R NP-difícil tal que $R \leq_P^T Q$

Ejemplo. Probar que el problema de encontrar un $s-t$ camino de largo máximo en un grafo G, dada una función de largos $l: E \longrightarrow \mathbb{R}$, $s,t \in V(G)$ es NP-completo.

1. $s-t$ **Camino Máximo está en** NP. Dado un conjunto $F \subset E$, verificar si F es camino es fácil, y calcular su largo también.
2. **Ciclo Hamiltoniano** $\leq_P^T$ $s-t$ **Camino Máximo**. Dado G grafo, para verificar si G tiene un ciclo Hamiltoniano repetimos lo siguiente: Para cada arista $e = uv$ verificar si existe $u-v$ camino de largo $n-1$. Notemos que

$$\text{Existe alguno de estos caminos} \iff G \text{ tiene ciclo Hamiltoniano.}$$

Problema Controlable. Encontrar un $s-t$ camino de tamaño máximo se reduce al problema encontrar un camino de tamaño máximo.

¿Qué hacemos si nos enfrentamos a problemas NP-difíciles?

- Heurísticas.
- Algoritmos de aproximación.

Definición 6 (*Algoritmos de aproximación*)**.** Sea Q un problema de maximización:

$$\text{máx}\{w(S) : S \in \mathcal{F}\}.$$

Un algoritmo polinomial que devuelve un conjunto $S \subset \mathcal{F}$:

$$w(S) \geq \frac{w(OPT)}{\alpha},$$

donde OPT es el óptimo para Q, se llama algoritmo de aproximación.

Análogamente, si Q es de minimización, la idea es encontrar S tal que:

$$w(S) \leq \alpha w(OPT)$$

En ambos casos, $\alpha \geq 1$ se conoce como el **factor de aproximación** (α puede depender de los parámetros del problema).

3. El problema del vendedor viajero (TSP).

Antes de explicitar el problema, veamos dos definiciones sobre grafos que ayudan a comprenderlo mejor:

Definición 7 (*Tour/Ciclo Hamiltoniano*)**.** Sea $G = G(V,E)$ un grafo. Un *Tour/Ciclo Hamiltoniano* es un paseo/ciclo en G que visita cada vértice al menos una vez.

Definición 8 (*Paseo Euleriano*)**.** Sea $G = G(V,E)$ un grafo. Un *paseo Euleriano* es un paseo en G que recorre cada arista exactamente una vez.

Ahora veamos el problema:

Definición 9 (*Problema del vendedor viajero*)**.** Sea $G = G(V,E)$ un grafo, $l : E \mapsto \mathbb{R}$ función de largo. El *problema del vendedor viajero* consiste en encontrar un ciclo Hamiltoniano de largo mínimo.

Obs 2. Una variante del problema anterior es considerar la búsqueda de un tour en vez de un ciclo. De hecho ambos problemas coinciden cuando consideramos l, la función de largo, métrica i.e. satisface la desigualdad triangular, y que el grafo G sea completo.

El problema de encontrar un ciclo Hamiltoniano de largo mínimo en un grafo completo es NP-difícil. De hecho tenemos lo siguiente:

Teorema 2 (Ciclo Hamiltoniano $\leq$ TSP)**.** *El problema de encontrar un ciclo hamiltoniano en un grafo se reduce al TSP.*

Veamos un dibujo para entender la idea de la demostración:

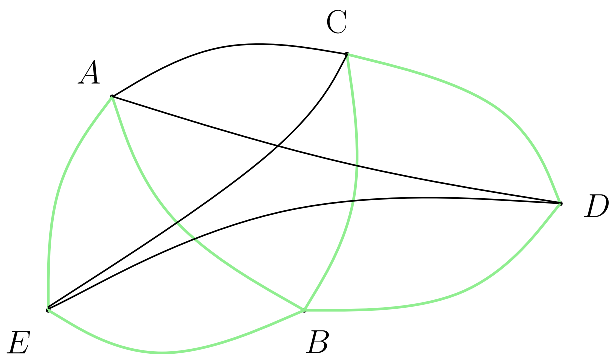


Figura 1: Tour: ABCDBEA, Ciclo: ACDBEA

Demostración. Sea G grafo y H el grafo obtenido al completarlo. Queremos determinar si G tiene un ciclo Hamiltoniano. Ponemos en H la siguiente función de pesos:

$$w(e) = \begin{cases} 0 & e \in E(G) \\ 1 & e \notin E(G) \end{cases}$$

Utilizando el un algoritmo para TSP podemos encontrar un ciclo Hamiltoniano C de H de peso mínimo. Ahora es fácil decidir:

- Si $w(C) = 0$, entonces G tiene un ciclo Hamiltoniano.
- Si $w(C) \neq 0$, entonces G no tiene un ciclo Hamiltoniano.

□

El siguiente lema demuestra la equivalencia dicha en la **Obs 1**.

Lema 1. Sea G grafo completo y $l : E \mapsto \mathbb{R}$ métrica. Si W es un tour, entonces existe C ciclo Hamiltoniano tal que $l(C) \leq l(W)$.

Demostración. Si W es un tour lo describimos por $W = V_1V_2...V_{N+1}$ donde $V_{N+1} = V_1$. Ahora nos basta encontrar el ciclo obtenido al borrar todas las apariciones de cada vértice salvo la primera, en la escritura de W. Este queda $C = S_1S_2...S_n$, mientras que W queda descrito ahora como $W = W_1W_2...W_n$, donde W_i es un $S_i - S_{i+1}$ paseo. Por desigualdad triangular se concluye.

□

Veamos un resultado clásico que no demostraremos:

Lema 2. Sea G un (multi)grafo conexo tal que todo vértice tiene grado par. Entonces G posee un paseo Euleriano que se encuentra en tiempo polinomial.

También se tiene la siguiente versión para grafos dirigidos:

Sea G un (multi)digrafo fuertemente conexo tal que todo vértice tiene igual número de arcos entrantes que salientes. Entonces G posee un paseo Euleriano dirigido que se encuentra en tiempo polinomial.

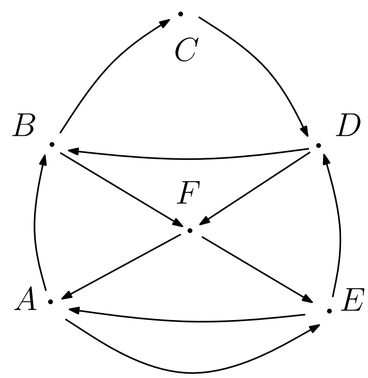
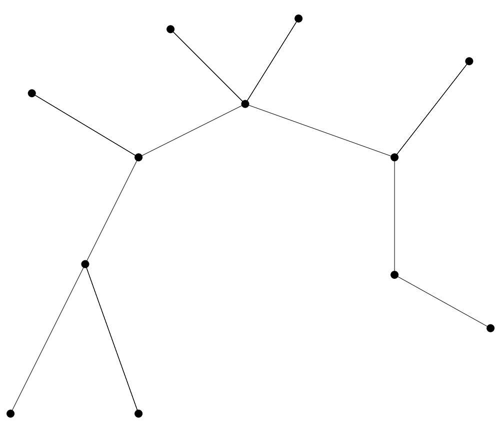


Figura 2: Paseo Euleriano: ABCDBFEAEDFA

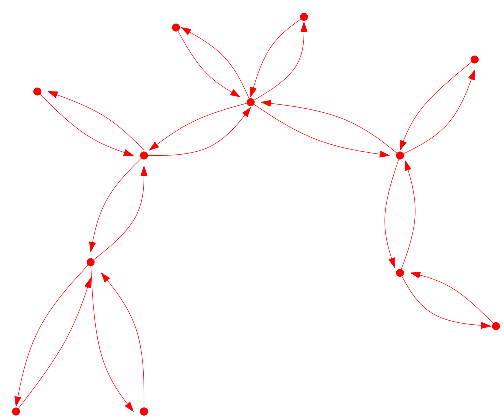
A continuación se exponen dos algoritmos de aproximación para TSP métrico:

Algoritmo 1: Primer algoritmo de aproximación TSP métrico

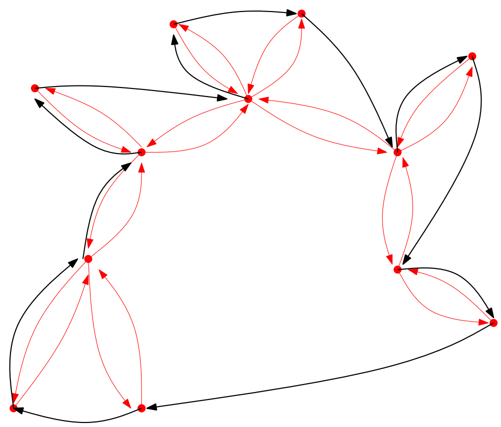
Sea G grafo completo, l métrica
Dado T árbol generador de G de peso mínimo
Encontrar paseo euleriano P del multigrafo 2T (cada arista aparece dos veces)
A partir de P, hacer atajos (Usando Lema 1 pues P es paseo hamiltoniano en particular) y encontrar ciclo hamiltoniano C



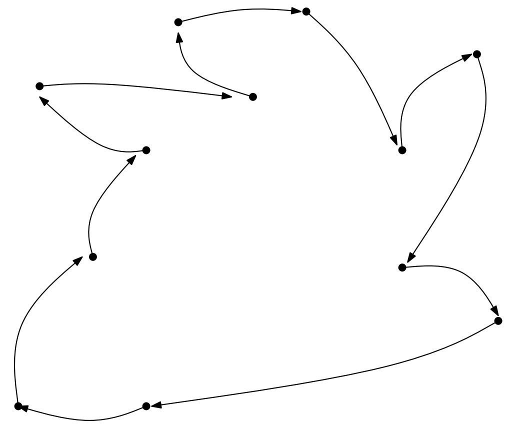
Aca vemos un arbol generador



El siguente paso es duplicar cada arista,de modo que una es antiparalela a la otra, mencionamos que este digrafo en un paseo Euleriano donde se pasa 2 veces por cada vertice



En esta etapa usamos el Lema 1 para hacer atajos y así encontrar un ciclo Hamiltoniano



El ciclo Hamiltoniano resultante

Observamos que el ciclo obtenido usando este algoritmo satisface lo siguiente:

$$l(C) \leqslant l(P) \leqslant 2l(T) \leqslant 2l(OPT)$$

En donde OPT es el óptimo de TSP métrico.

Un segundo algoritmo fue desarrollado por Nicos Cristofedes, profesor del Imperial College de Londres, en 1976. Actualmente es el mejor algoritmo de aproximación que existe. La principal mejora que introduce el algoritmo es que encuentra un subgrafo euleriano de G sin duplicar todas las aristas de T, usando vértices que ya tienen grado par y que, por lo tanto, no se necesitan duplicar.

Algoritmo 1: Segundo algoritmo de aproximación TSP métrico

Sea G grafo completo, l métrica
Dado T árbol generador de G de peso mínimo
Sea I el conjunto de vértices de grado impar de T. (Notar que $|I|$ es par puesto que la suma de los grados de un vértice en G es par)
Sea M matching perfecto en $(I, E[I])$ de peso (largo) mínimo
$T \cup M$ es un multigrafo euleriano
Encontrar P paseo euleriano de $T \cup M$
A partir de P, hacer atajos (Usando Lema 1 pues P es paseo hamiltoniano en particular) y encontrar ciclo hamiltoniano C

Se observa que el ciclo obtenido satisface

$$l(C) \leqslant l(P) \leqslant l(T) + l(M)$$

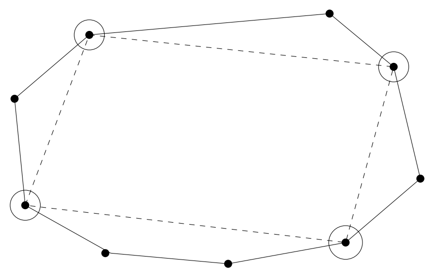


Figura 5: El ciclo que vemos aca representa el óptimo, ahora OPT_I sera el ciclo obtenido(haciendo atajos) borrando los vértices fuera de I en OPT

Estimemos $l(M)$: sea OPT_I el ciclo obtenido borrando los vértices de OPT que están fuera de I (haciendo atajos como en el Lema 1) entonces:

$$l(OPT) \geqslant l(OPT_I) = l(OPT_I^{par}) + l(OPT^{Impar})$$

Donde OPT_I^{par} corresponde a las aristas pares y OPT^{Impar} corresponde a las aristas impares considerando alguna numeración de las aristas en OPT_I. Ambos son matchings perfectos de I pues OPT_I contiene todos los vértices de I.

De estas dos estimaciones se concluye que

$$l(C) \leqslant \frac{3}{2} l(OPT)$$

Queda propuesto demostrar que el algoritmo glotón es una 2-aproximación de encontrar un matching de cardinalidad máxima.