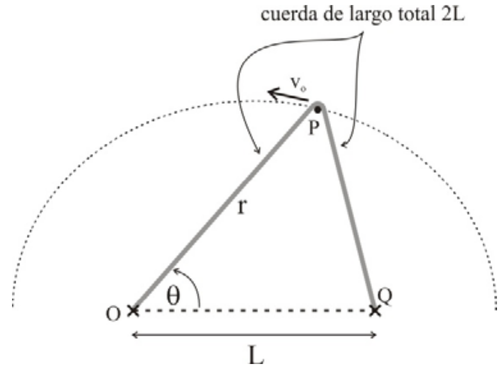
Control 1 8/9/2010 FI2001 Mecánica, Semestre Primavera 2010

Tiempo: 3 Horas Profesor: Ricardo Muñoz M.

1. Una cuerda inextensible de largo *2L* tiene sus extremos fijos en los puntos O y Q, separados entre sí una distancia *L* como muestra la figura. Una partícula P desliza por el borde interior de la cuerda, manteniendo a ésta siempre tensa.

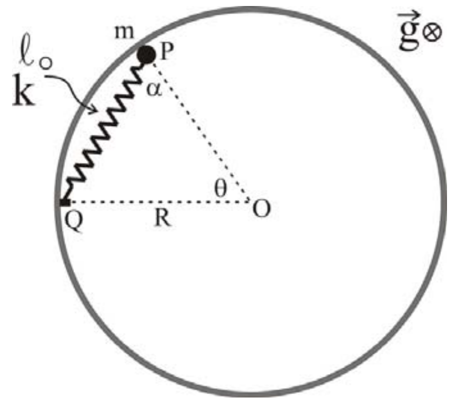


a) Muestre que la trayectoria de P descrita con el sistema polar de la figura está dada por

$$r(\theta) = \frac{3L/2}{(2-\cos\theta)} \ .$$

b) Si la partícula se mueve con rapidez constante, v_o, determine los valores de $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$ para $\theta = 60^o$ y $\theta = 90^o$.

2. En el fondo de un recipiente cilíndrico de eje vertical y radio *R* se encuentra una partícula P de masa *m* ligada a un resorte ideal de constante elástica *k* y largo natural ℓ_o, cuyo otro extremo está fijo a un punto Q ubicado en la pared interior del recipiente (ver figura). Considere una condición en que la partícula inicia su movimiento desde el reposo, estando el resorte completamente comprimido ($\theta \sim 0^o$). Suponiendo que en el movimiento de P ella se mantiene en contacto con la pared interior del recipiente, se pide:



a) Determinar la magnitud de la fuerza del resorte y el valor del ángulo α entre el resorte y el radio OP en función de θ.

b) Escribir las ecuaciones de movimiento de P.

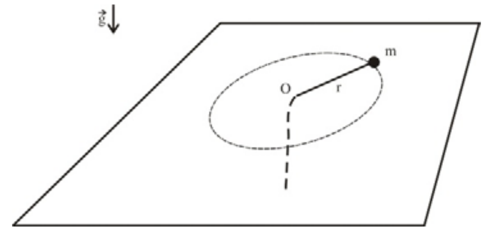
c) Encontrar una expresión para $\dot{\theta}$ en función de θ.

d) Determinar el ángulo θ_s en que P se separa de la pared. ¿Para qué condición de ℓ_o y *R* la partícula nunca se separa de la pared?

Indicación: desprecie todos los roces y tenga en cuenta que la partícula se mueve en un plano horizontal.

3. Una partícula de masa *m* gira sobre una superficie horizontal atada mediante una cuerda ideal a un punto O. Inicialmente la partícula se encuentra a una distancia *R* del punto O y su velocidad angular es ω_o. Si la cuerda es recogida a través de un orificio en O a una tasa constante v_o, y consideramos el movimiento de la partícula entre la condición inicial y una condición final en que su distancia al punto O es *R / 3*, se pide:

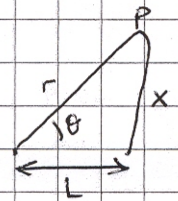
a) Suponiendo que NO existe fuerza de roce, determine el la tensión de la cuerda y la velocidad angular de la partícula en la condición final.



b) Suponiendo que SI existe una fuerza de roce viscoso descrita por $\vec{F}_{rv} = -c\vec{v}$, donde *c* es una constante positiva conocida y $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula, determine la tensión de la cuerda y la velocidad angular de la partícula en la condición final.

P1

a)



$$r + x = 2L$$

$$x^2 = r^2 + L^2 - 2rL\cos\theta$$

$$(2L - r)^2 = r^2 + L^2 - 2rL\cos\theta$$

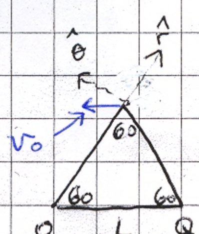
$$4L^2 + \cancel{r^2} - 4Lr = \cancel{r^2} + L^2 - 2rL\cos\theta$$

$$3L^2 = r\,(4L - 2L\cos\theta)$$

$$\rightarrow \boxed{r = \frac{\frac{3}{2}L}{2 - \cos\theta}}$$

b)

$\theta = 60°$ justo el punto de simetría de P



$\Rightarrow r = L$ y $\vec{v}_0 \parallel \overline{OQ}$

$\therefore \dot{r} = -v_0 \cos 60$

$r\dot{\theta} = +v_0 \operatorname{sen} 60$

$$\rightarrow \boxed{\dot{r} = -\frac{1}{2}v_0} \qquad \boxed{\dot{\theta} = \frac{v_0}{L}\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$\theta = 90°$ lo hacemos "matemáticamente":

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{-\frac{3}{2}L \operatorname{sen}\theta}{(2-\cos\theta)^2} \qquad \left.\frac{dr}{d\theta}\right|_{\theta=90°} = \frac{-\frac{3}{2}L}{4} = -\frac{3}{8}L$$

además $\left. r\right|_{\theta=90°} = \dfrac{\frac{3L}{2}}{2} = \dfrac{3}{4}L$

$$\therefore \left.\vec{v}\right|_{\theta=60°} = -\frac{3}{8}L\dot{\theta}\,\hat{r} + \frac{3}{4}L\dot{\theta}\,\hat{\theta} = L\dot{\theta}\left(-\frac{3}{8}\hat{r} + \frac{3}{4}\hat{\theta}\right)$$
$$= \frac{3}{4}L\dot{\theta}\left(-\frac{1}{2}\hat{r} + \hat{\theta}\right)$$

y debe cumplirse $|\vec{v}| = v_0$

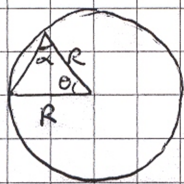
$$\Rightarrow (L\dot{\theta})^2\left(\frac{9}{16}\right)\left(\frac{1}{4}+1\right) = v_0^2$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{L^2}\frac{64}{45}$$

$$\boxed{\dot{\theta} = +\frac{v_0}{L}\frac{8}{3\sqrt{5}}}$$

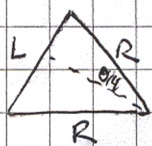
$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\dot{\theta} = -\frac{3}{8}L\,\frac{v_0}{L}\,\frac{8}{3\sqrt{5}} = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{5}}v_0 = \dot{r}}$$

P2



a)

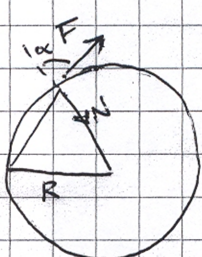
$$2\alpha + \theta = \pi \rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}}$$



$$L = 2R\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \quad |F_e| = k\left|2R\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2} - l_0\right|$$

b)



$$\hat{r}: \quad -mR\dot{\theta}^2 = F\cos\alpha - N$$

$$\hat{\theta}: \quad mR\ddot{\theta} = F\,\text{sen}\,\alpha$$

$$F = k\left(l_0 - 2R\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$$

c) Ya que aparece $\frac{\theta}{2}$ como principal hacemos un cambio de variable

$$\phi \equiv \frac{\theta}{2} \qquad \dot{\theta} = 2\dot{\phi} \qquad \ddot{\theta} = 2\ddot{\phi}$$

$$\Rightarrow \quad mR2\ddot{\phi} = k\left(l_0 - 2R\,\text{sen}\,\phi\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\phi\right)$$

$$2mR\ddot{\phi} = k\left(l_0 - 2R\,\text{sen}\,\phi\right)\cos\phi$$

$$\ddot{\phi} = \frac{k l_0}{2mR}\cos\phi - \frac{k}{m}\,\text{sen}\,\phi\cos\phi$$

$$\int_0^{\dot{\phi}} \dot{\phi}\,d\dot{\phi} = \int_0^{\phi}\left[\frac{k l_0}{2mR}\cos\phi - \frac{k}{m}\,\text{sen}\,\phi\cos\phi\right]d\phi$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 = \left[\frac{k l_0}{2mR}\,\text{sen}\,\phi - \frac{k}{2m}\,\text{sen}^2\phi\right]_0^{\phi}$$

$$\dot{\phi}^2 = \frac{k l_0}{mR}\,\text{sen}\,\phi - \frac{k}{m}\,\text{sen}^2\phi$$

$$\phi = \frac{\theta}{2} \qquad \boxed{\dot{\theta}^2 = 4\frac{k l_0}{mR}\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{4k}{m}\,\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

d)

$$N = k\left(l_0 - 2R\,\text{sen}\,\phi\right)\underbrace{\text{sen}\,\phi}_{\cos\alpha} + mR4\dot{\phi}^2$$

$$N = k l_0\,\text{sen}\,\phi - 2Rk\,\text{sen}^2\phi + 4mR\left(\frac{k l_0}{mR}\,\text{sen}\,\phi - \frac{k}{m}\,\text{sen}^2\phi\right)$$

$$N = \text{sen}\,\phi\left(k l_0 + 4k l_0\right) + \text{sen}^2\phi\left(-2kR - 4kR\right)$$

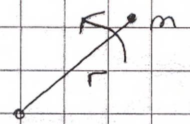
$$= 5k l_0\,\text{sen}\,\phi - 6kR\,\text{sen}^2\phi = k l_0\,\text{sen}\,\phi\left(5 - 6\frac{R}{l_0}\,\text{sen}\,\phi\right)$$

$$N = 0 \rightarrow \text{sen}\,\phi_s = \frac{5}{6}\frac{l_0}{R} \qquad \boxed{\text{sen}\,\frac{\theta_s}{2} = \frac{5}{6}\frac{l_0}{R}}$$

para que exista: $\frac{5}{6}\frac{l_0}{R} \le 1 \Rightarrow \boxed{l_0 \le \frac{6}{5}R}$

P3

1/2



a)

$$m(\ddot r - r\dot\theta^2) = -T$$

$$m(2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta) = 0 \quad \leftrightarrow \quad r^2\dot\theta = h_0 = cte$$
$$= R^2\omega_0$$

$$\dot r = -v_0 \qquad \ddot r = 0 \qquad \rightarrow \quad \dot\theta = \frac{R^2\omega_0}{r^2}$$

$$\rightarrow \quad T = r\dot\theta^2 m$$

$$T = mr\left(\frac{R^2\omega_0}{r^2}\right)^2 = \frac{R^4\omega_0^2 m}{r^3}$$

$$r = \frac{R}{3} \quad \rightarrow \quad \boxed{T = 27\,\omega_0^2 mR}$$

$$\boxed{\dot\theta = \frac{R^2\omega_0}{\left(\frac{R}{3}\right)^2} = 9\omega_0}$$

b)

$$m(\ddot r - r\dot\theta^2) = -T - c\dot r$$

$$m(2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta) = -cr\dot\theta \qquad \circledast$$

$$\circledast \rightarrow \quad m\,\frac{d(r^2\dot\theta)}{dt} = -c\,r^2\dot\theta$$

(Sale también de ecuación de torque/mom. angular)

$$\Rightarrow \quad r^2\dot{\theta} = (r^2\dot{\theta})_0 \, e^{-\frac{c}{m}t}$$

$$\boxed{r^2\dot{\theta} = R^2\omega_0 \, e^{-\frac{c}{m}t}}$$

$$\dot{r} = -v_0 \quad \rightarrow \quad r = \frac{R}{3} \text{ en } \boxed{\tau = \frac{\frac{2}{3}R}{v_0}}$$

$$\dot{\theta}_f = \frac{R^2\omega_0}{\left(\frac{R}{3}\right)^2} e^{-\frac{c}{m}\tau} = \underline{\underline{9\omega_0 \, e^{-\frac{c}{m}\tau}}}$$

$$T = mr\dot{\theta}^2 - c\dot{r}$$

$$T = m\frac{(r^2\dot{\theta})^2}{r^3} + v_0 c$$

$$T = m\frac{\left[R^2\omega_0 e^{-\frac{c}{m}\tau}\right]^2}{\left(\frac{R}{3}\right)^3} + v_0 \cdot c$$

$$\boxed{T = mR\omega_0^2 \cdot 27 \cdot e^{-\frac{2c}{m}\tau} + v_0 c}$$

$$\tau = \frac{2R}{3v_0}$$