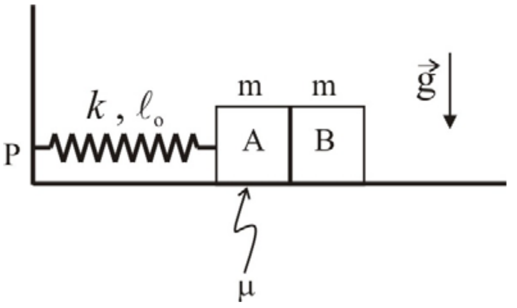
Control 1 3/9/2008 FI2A1 Mecánica, Semestre Primavera 2008

Tiempo: 3 Horas Profesor: Ricardo Muñoz M.

1. Dos bloques A y B de igual tamaño y masa (m c/u) se encuentran sobre una superficie horizontal. Sólo existe roce entre el bloque A y la superficie, caracterizado por coeficientes de roce estático y cinético iguales a μ. El bloque A se encuentra unido a un punto fijo P, a través de un resorte de largo ℓ_o y constante elástica k.

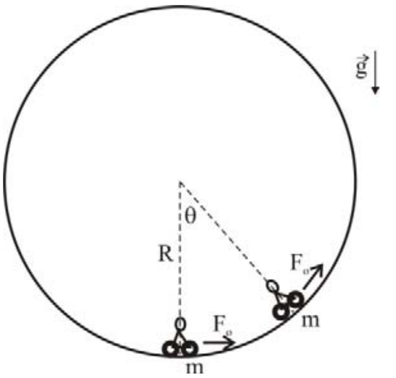


a) Determine la distancia máxima δ que se pueden apartar los dos bloques desde la posición en la cual el resorte no está deformado, de modo que al colocarlos en esa posición no se produzca movimiento.

b) Si los bloques se liberan desde el reposo desde una posición en la cual el resorte está comprimido en 2δ determine la velocidad final del bloque B.

c) Para la condición de b), determine el tiempo transcurrido entre la condición inicial y la separación de los bloques.

2. Consideremos el caso de un motonetista de circo que intenta con su moto dar vueltas por el interior de un cilindro hueco de eje horizontal y radio R. Modelaremos este problema como el de una partícula de masa m sometida a una fuerza impulsora tangencial de magnitud F_o constante. La partícula inicia su movimiento desde el reposo en el punto más bajo del cilindro ($\theta = 0$).

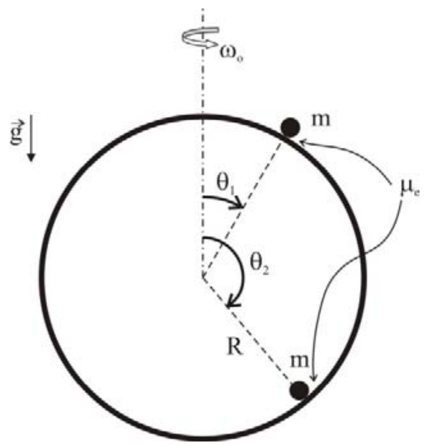


a) Suponiendo que la partícula no se separa del cilindro, determine su velocidad angular en función de θ.

b) Suponiendo que la partícula no se separa del cilindro, determine la magnitud de la fuerza que el cilindro ejerce sobre la partícula en función de θ.

c) Si la magnitud de la fuerza impulsora es $F_o = \frac{3}{4}mg$, indique si nuestro motonetista logrará dar al menos 1 vuelta sin separarse del cilindro. Justifique claramente su respuesta.

3. Considere un cascarón esférico de radio R y 2 partículas de igual masa, m. La partícula 1 se ubica sobre el manto exterior del cascarón, mientras que la partícula 2 está en su interior. El coeficiente de roce entre las partículas y la superficie del cascarón es $\mu_e = \frac{1}{\sqrt{3}}$.



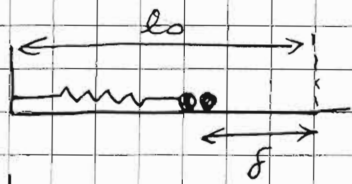
a) Si el cascarón esférico se mantiene en reposo, determine los rangos de θ_1 y θ_2 en que cada partícula puede permanecer en reposo.

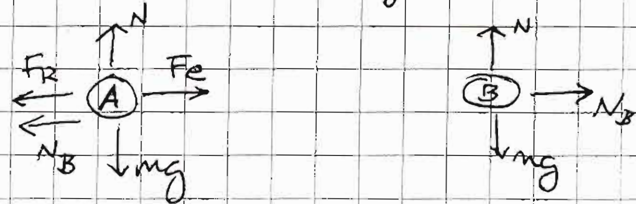
b) Si el cascarón esférico gira en torno a su eje vertical con velocidad angular constante ω_o, determine el o los valores de ω_o tal que la partícula 1 ubicada en $\theta_1 = 15^o$, pueda permanecer en reposo respecto al cascarón.

c) Si el cascarón esférico gira en torno a su eje vertical con velocidad angular constante ω_o, determine el o los valores de ω_o tal que la partícula 2 ubicada en $\theta_2 = 135^o$, pueda permanecer en reposo respecto al cascarón.

P1

a)





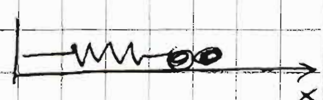
equilibrio de B $\Rightarrow$ $N_B = 0$

equilibrio de A $\Rightarrow$ $F_R = F_e$

condición crítica
$F_R = \mu N$
$= \mu mg$

$$\mu mg = k\delta \rightarrow \boxed{\delta = \mu \frac{mg}{k}}$$

b)



$x_A = x_B = x$

A : $m\ddot{x} = -\mu mg - k(x - l_0) - N_B$ (1)

B : $m\ddot{x} = N_B$ (2)

(1) y (2) $\rightarrow$ $2m\ddot{x} = -\mu mg - k(x - l_0)$ (3)

Separación $\Rightarrow N_B = 0 \overset{(2)}{\Longrightarrow} \ddot{x} = 0 \overset{(3)}{\longrightarrow} 0 = -\mu mg - k(x_s - l_0)$

$$\Rightarrow \boxed{x_s = l_0 - \frac{\mu mg}{k}} = l_0 - \delta$$

Para simplificar el álgebra hagamos el cambio de variable

$$y = x - \left(l_0 - \frac{\mu m g}{k} \right) = x - (l_0 - \delta)$$

$$\dot{y} = \dot{x} \qquad \ddot{y} = \ddot{x}$$

$$(3) \rightarrow \qquad 2m\ddot{y} = -ky \qquad (4)$$

Cond. inicial $x = l_0 - 2\delta \rightarrow y = -\delta$

Cond final $x_s = l_0 - \delta \rightarrow y_s = 0$

$$\int_0^{v_f} 2m\dot{y}\, d\dot{y} = \int_{-\delta}^{0} -ky\, dy$$

$$m v_f^2 = \frac{k}{2}\delta^2 \rightarrow \boxed{v_f^2 = \frac{k}{2m}\delta^2} \qquad (5)$$

c) (4) es una ecuación de resorte con frecuencia angular $\omega_0^2 = \frac{k}{2m}$

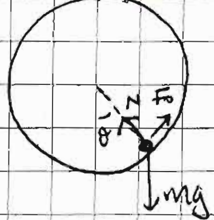
período $\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$

y el proceso entre $t=0$ y la primera pasada por el centro de la oscilación es $\frac{T}{4}$

$$\therefore \quad \boxed{\Delta t = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

también se puede hacer integrando (4) en el tiempo.

P2



$$-mR\dot{\theta}^2 = -N + mg\cos\theta \qquad (1)$$

$$mR\ddot{\theta} = F_0 - mg\,\text{sen}\,\theta \qquad (2)$$

$$(2) \rightarrow \int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} mR\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \int_{\theta=0}^{\theta} F_0 - mg\,\text{sen}\,\theta$$

a)

$$\boxed{mR\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = F_0\theta - mg(1-\cos\theta)} \qquad (3)$$

b) (3) en (1)

$$N = mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$$

$$= 2F_0\theta - 2mg(1-\cos\theta) + mg\cos\theta$$

$$\boxed{N = 2F_0\theta + 3mg\cos\theta - 2mg} \qquad (4)$$

c) $F_0 = \frac{3}{4}mg$

$$\frac{N}{mg} = \frac{3}{2}\theta + 3\cos\theta - 2$$

veamos el signo $N(\pi) = \frac{3}{2}\pi - 5 < 0$

$\Rightarrow$ se separó antes y no alcanzó a dar 1 vuelta.

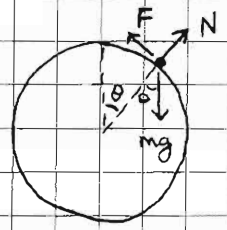
pobre Homero Simpson!

C1 2008/2

1/3

P3

a)

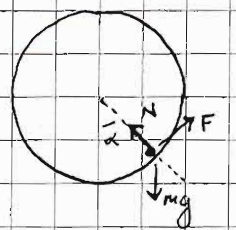


$$N = mg\cos\theta$$
$$F = mg\,\text{sen}\,\theta$$

$$|F| \leq \mu N$$

$$mg|\text{sen}\,\theta| \leq \mu\, mg\cos\theta$$

$$|\text{tg}\,\theta| \leq \mu = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow -30^\circ \leq \theta_1 \leq +30^\circ$$



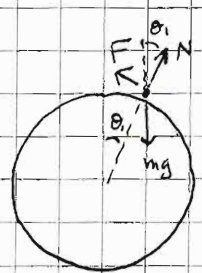
$$N = mg\cos\alpha \qquad (\theta_2 = 180^\circ - \alpha)$$
$$F = mg\,\text{sen}\,\alpha$$

idem al anterior $\rightarrow$ $-30^\circ \leq \alpha \leq +30^\circ$

$$\Downarrow$$

$$210^\circ \leq \theta_2 \leq 150^\circ$$

b)



$\theta_1 = 15^\circ$

$$\boxed{\begin{aligned} N\cos\theta_1 + F\,\text{sen}\,\theta_1 &= mg \\ N\,\text{sen}\,\theta_1 - F\cos\theta_1 &= -mR\,\text{sen}\,\theta_1\,\omega_0^2 \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow N = mg\cos\theta_1 - mR\,\text{sen}^2\theta_1\,\omega_0^2$$

$$F = mg\,\text{sen}\,\theta_1 + mR\,\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_1\,\omega_0^2$$

$$|F| \leq \mu N$$

notar que $F > 0 \ \forall\ \omega_0$

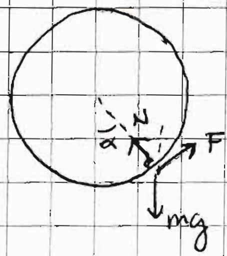
$$\therefore \quad mg\,\text{sen}\,\theta_1 + mR\,\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_1\,\omega_0^2 \leq \mu\left(mg\cos\theta_1 - mR\,\text{sen}^2\theta_1\,\omega_0^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{R\omega_0^2}{g}\,\text{sen}\,\theta_1\left(\cos\theta_1 + \mu\,\text{sen}\,\theta_1\right) \leq \mu\cos\theta_1 - \text{sen}\,\theta_1$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\omega_0^2}{g/R} \leq \frac{\mu\cos\theta_1 - \text{sen}\,\theta_1}{\text{sen}\,\theta_1\left(\cos\theta_1 + \mu\,\text{sen}\,\theta_1\right)}}$$

notar que para $\theta_1 < 30^\circ$ $\left(\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ el numerador > 0

c)



$\alpha = 45°$

$$\boxed{\begin{aligned} N\cos\alpha + F\,\mathrm{sen}\,\alpha &= mg \\ -N\,\mathrm{sen}\,\alpha + F\cos\alpha &= -mR\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\omega_0^2 \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} F &= mg\,\mathrm{sen}\,\alpha - mR\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha\,\omega_0^2 \\ N &= mg\cos\alpha + mR\,\mathrm{sen}^2\alpha\,\omega_0^2 \end{aligned}}$$

$\alpha = 45°$ $\quad \mathrm{sen}\,\alpha = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \frac{F}{mg} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{R\omega_0^2}{2g}$$ ← en este caso F puede cambiar signo si ω_0 es "muy" grande.

$$\frac{N}{mg} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{R\omega_0^2}{2g}$$

Condición de no deslizamiento:

$$|F| \leq \mu N \quad (*)$$

i) Caso $\quad \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{R\omega_0^2}{2g} \geq 0 \qquad (1)$

$$(*) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{R\omega_0^2}{2g} \leq \mu\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{R\omega_0^2}{2g}\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\mu) \leq \frac{R\omega_0^2}{2g}(1+\mu)$$

$$\Rightarrow \frac{R\omega_0^2}{2g} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(1-\mu)}{(1+\mu)} \qquad (2)$$

condiciones (1) y (2): $\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(1-\mu)}{(1+\mu)} \leq \frac{R\omega_0^2}{2g} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (3)$

ii) Caso $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{R\omega_0^2}{2g} \leq 0 \qquad (4)$

$$\circledast \rightarrow \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{R\omega_0^2}{2g} \leq \mu\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{R\omega_0^2}{2g}\right)$$

$$\rightarrow \quad \frac{R\omega_0^2}{2g}(1-\mu) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mu)$$

$$\rightarrow \quad \frac{R\omega_0^2}{2g} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(1+\mu)}{(1-\mu)} \qquad (5)$$

Condiciones (4) y (5) →

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{R\omega_0^2}{2g} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(1+\mu)}{(1-\mu)} \qquad (6)$$

La solución (3) y (6) ⇒

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(1-\mu)}{(1+\mu)} \leq \frac{R\omega_0^2}{2g} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(1+\mu)}{(1-\mu)}}$$

o bien

$$\boxed{\sqrt{2}\,\frac{g}{R}\,\frac{1-\mu}{1+\mu} \leq \omega_0^2 \leq \sqrt{2}\,\frac{g}{R}\,\frac{1+\mu}{1-\mu}}$$

Si ω_0 es "muy" grande resbala hacia la derecha. si es "muy" chica, resbala hacia abajo.