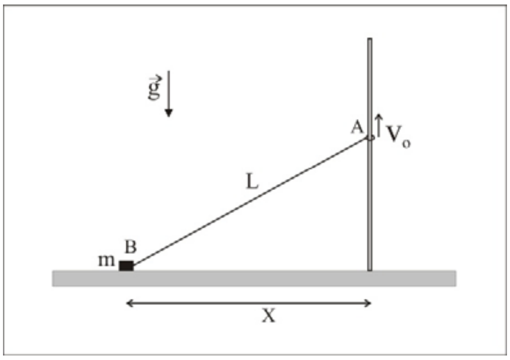
Control 1 21/4/2010 FI2001 Mecánica, Semestre Otoño 2010

Tiempo: 2.5 Horas Profesor: Ricardo Muñoz M.

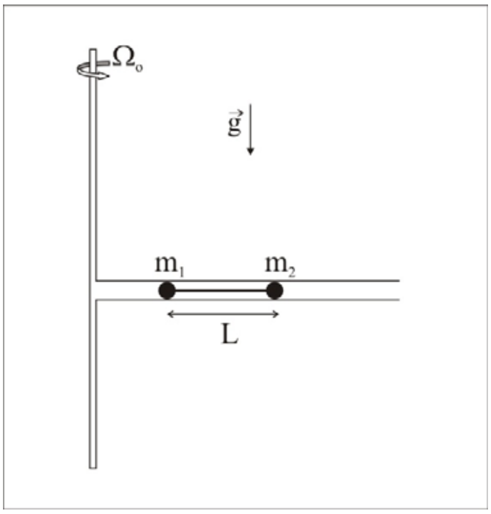
1. Un anillo A desliza a lo largo de una barra vertical fija sobre una superficie horizontal. El anillo se encuentra atado mediante una cuerda de largo L a una partícula B de masa m que puede deslizar sin roce sobre la superficie. En $t = 0$ el anillo está en contacto con la superficie, la cuerda está estirada y el anillo es forzado a ascender por la barra con rapidez constante v_o.



a) Determinar la rapidez y la magnitud de la aceleración de B en función de su distancia x a la base de la barra vertical, mientras B no se separa de la superficie.

b) Calcule la tensión en la cuerda y la magnitud de la fuerza que la superficie ejerce sobre B en el instante en que B se encuentra a una distancia $L/2$ de la base de la barra vertical, suponiendo que B no se ha separado de la superficie.

2. Dos partículas de masa m_1 y m_2 que están unidas por una cuerda de largo L se mueven sin roce por el interior de un tubo horizontal que gira con velocidad angular constante Ω_o en torno a la vertical. Inicialmente se libera el sistema desde el reposo relativo al tubo, con la partícula de masa m_1 a una distancia R del eje de giro y la cuerda completamente estirada.

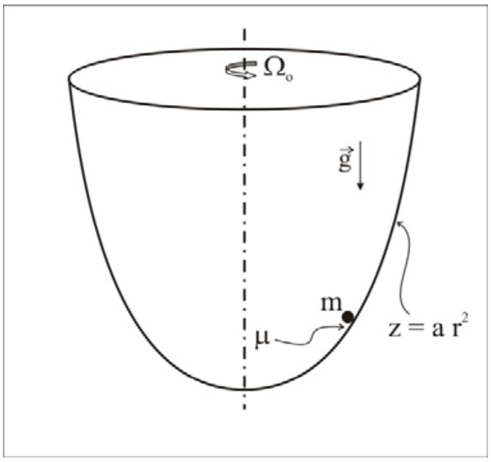


a) Escriba las ecuaciones de movimiento y sepárelas en ecuaciones escalares.

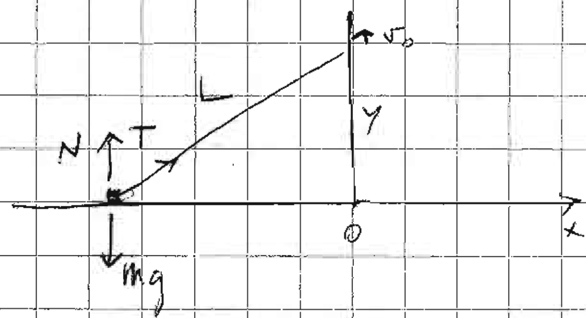
b) Resuelva estas ecuaciones y encuentre las distancias de las partículas al eje, $r_1(t)$ y $r_2(t)$, como funciones explícitas del tiempo.

c) Calcule el valor de la tensión de la cuerda en función de parámetros conocidos del problema.

3. Un vaso con la forma de un paraboloide de rotación dado por la ecuación $z = a\,r^2$ rota con velocidad angular constante, Ω_o, en torno a su eje de simetría vertical. Sobre la superficie interior del vaso se encuentra una partícula de masa m que tiene un coeficiente de roce estático μ con la superficie. Se pide determinar el o los rango(s) de altura sobre la base del vaso en que la partícula puede mantenerse en reposo con respecto al vaso. Considere que en este problema se cumple que: $\frac{\Omega_o^2}{ag} = 1$ y $\mu = \frac{1}{4}$.



P1



a)

$$x^2 + y^2 = L^2 \qquad (1)$$

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$$

$$\dot{x} = -\frac{y}{x}\dot{y} = -\frac{y}{x}v_0 \qquad (2)$$

$$y = \sqrt{L^2 - x^2}$$

$$\boxed{\dot{x} = -\frac{\sqrt{L^2-x^2}}{x}v_0} \qquad (3)$$

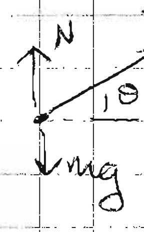
$$\frac{d(2)}{dt} \rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{v_0^2}{x} + \frac{y v_0}{x^2}\dot{x}$$

$$= -\frac{v_0^2}{x} + \frac{\sqrt{L^2-x^2}\,v_0}{x^2}\left(-\frac{\sqrt{L^2-x^2}}{x}v_0\right)$$

$$\rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{v_0^2}{x} - \frac{(L^2 - x^2)\, v_0^2}{x^3} = \frac{-x^2 v_0^2 - L^2 v_0^2 + x^2 v_0^2}{x^3}$$

$$\boxed{\ddot{x} = -\frac{L^2 v_0^2}{x^3}} \qquad (4)$$

b)



$$\hat{\imath}) \quad m\ddot{x} = T\cos\theta \qquad (5)$$

$$\hat{\jmath}) \quad 0 = N + T\,\mathrm{sen}\,\theta - mg \qquad (6)$$

$$(5): \quad T = \frac{m\ddot{x}}{\cos\theta} \qquad \cos\theta = \frac{-x}{L}$$

$$(4) \quad \rightarrow \quad T = +\frac{mL^3 v_0^2}{x^4}$$

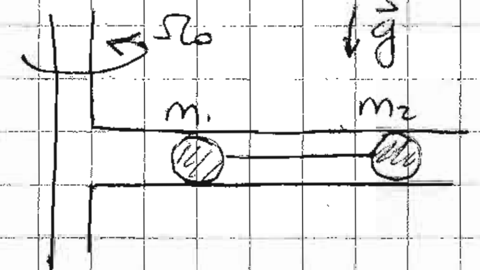
$$x = \frac{-L}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{m v_0^2}{L}\, 16}$$

$$(6) \rightarrow N = mg - T\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad x = -\frac{L}{2} \rightarrow \theta = 60^\circ \quad \mathrm{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{N = mg - \frac{m v_0^2}{L}\, 16 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

P2

1/4



a)

① $\hat{r}$) $m_1(\ddot{r}_1 - r_1\Omega_0^2) = T$ (1)

$\hat{\theta}$) $m_1(2\dot{r}_1\Omega_0 + \cancel{r_1\ddot{\theta}_1}^{\,0}) = N_{1\theta}$ (2)

$\hat{k}$) $0 = -m_1 g + N_{1z}$ (3)

② $\hat{r}$) $m_2(\ddot{r}_2 - r_2\Omega_0^2) = -T$ (4)

$\hat{\theta}$) $m_2(2\dot{r}_2\Omega_0 + \cancel{r_2\ddot{\theta}_2}^{\,0}) = N_{2\theta}$ (5)

$\hat{k}$) $0 = -m_2 g + N_{2z}$ (6)

Condición cinemática : $\left.\begin{aligned} r_2 &= r_1 + L \\ \dot{r}_2 &= \dot{r}_1 \\ \ddot{r}_2 &= \ddot{r}_1 \end{aligned}\right\}$ (7)

b) (1), (4), (7):

$$m_1(\ddot{r}_1 - r_1\Omega_0^2) = -m_2(\ddot{r}_1 - (r_1+L)\Omega_0^2)$$

$$\Rightarrow (m_1+m_2)\ddot{r}_1 - \Omega_0^2(m_1+m_2)r_1 = m_2 L \Omega_0^2 \qquad (8)$$

Ec. diferencial de la forma

$$\ddot{y} - ay = b$$

Solución general

$$y = A e^{\sqrt{a}\,t} + B e^{-\sqrt{a}\,t} - \frac{b}{a}$$

en nuestro caso:

$$a = \Omega_0^2$$

$$b = \frac{m_2 L \Omega_0^2}{(m_1+m_2)}$$

$\therefore$

$$r_1 = A e^{\Omega_0 t} + B^{-\Omega_0 t} - \frac{m_2 L}{m_1 + m_2}$$

$r_1(0) = R$

$\dot{r}_1(0) = 0$

$$\Rightarrow \quad R = A + B - \frac{m_2}{m_1+m_2} L \quad (*)$$

$$\dot{r}_1 = A \Omega_0 e^{\Omega_0 t} - B \Omega_0 e^{-\Omega_0 t}$$

$$\dot{r}_1(0) = A\Omega_0 - B\Omega_0 = 0 \Rightarrow A = B$$

$$\text{en } (*) \Rightarrow \quad 2A - \frac{m_2}{m_1+m_2} L = R$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\left(R + \frac{m_2}{m_1+m_2} L\right)$$

$\therefore$

$$\boxed{\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{2}\left(R + \frac{m_2}{m_1+m_2} L\right)\left[e^{\Omega_0 t} + e^{-\Omega_0 t}\right] - \frac{m_2 L}{m_1+m_2} \\ r_2 &= r_1 + L \end{aligned}}$$

c)

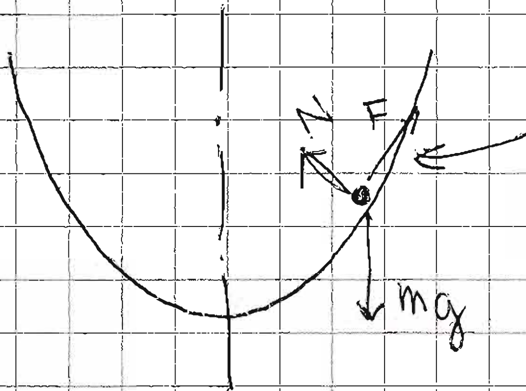
$$(1) \Rightarrow \quad T = m_1 (\ddot{r}_1 - r_1 \Omega_0^2)$$

usando (8):

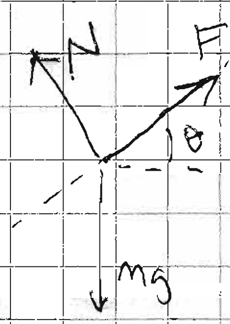
$$T = m_1 \left[\frac{m_2}{m_1 + m_2} L \Omega_0^2 + \Omega_0^2 r_1 \right] - m_1 r_1 \Omega_0^2$$

$$\boxed{T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} L \Omega_0^2}$$

P3



$z = ar^2 \quad (0)$



$$\hat{k} = \quad F \operatorname{sen}\theta + N \cos\theta = mg \qquad (1)$$

$$\hat{r} : \quad -m r \Omega_0^2 = -N \operatorname{sen}\theta + F \cos\theta \qquad (2)$$

y θ es el ángulo de la tangente de la parábola →

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{dz}{dr} = 2ar \qquad (3)$$

Reordenando (1) y (2):

$$F \operatorname{sen}\theta + N\cos\theta = mg \qquad (4)$$

$$F\cos\theta - N\operatorname{sen}\theta = -mr\Omega_0^2 \qquad (5)$$

Despejamos F y N:

$(4)\cdot\operatorname{sen}(\theta) + (5)\cos\theta \Rightarrow$

$$F = mg\operatorname{sen}\theta - mr\Omega_0^2\cos\theta \qquad (6)$$

pero (3) $\rightarrow \quad r = \dfrac{tg\theta}{2a} \qquad (7)$

en (6) $\rightarrow$

$$F = mg\operatorname{sen}\theta - m\frac{tg\theta}{2a}\Omega_0^2\cos\theta$$

$$\rightarrow \quad F = mg\operatorname{sen}\theta - m\frac{\Omega_0^2}{2a}\operatorname{sen}\theta$$

$$F = mg\operatorname{sen}\theta\left(1 - \frac{\Omega_0^2}{2ag}\right)$$

nos dicen $\dfrac{\Omega_0^2}{ag} = 1 \Rightarrow \boxed{F = \frac{1}{2}mg\operatorname{sen}\theta}$ (8)

(4) $\cdot \cos\theta$ − (5) $\cdot \operatorname{sen}\theta \Rightarrow$

$$N = mg\cos\theta + mr\Omega_0^2 \operatorname{sen}\theta$$

usando nuevamente (7)

$$N = mg\cos\theta + m\frac{\operatorname{tg}\theta}{2a}\Omega_0^2 \operatorname{sen}\theta$$

$$= mg\left(\cos\theta + \frac{\Omega_0^2}{2ag}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}\right)$$

pero $\dfrac{\Omega_0^2}{ag} = 1$

$$\Rightarrow \quad \boxed{N = mg\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}\right)} \quad (9)$$

Condición de no-resbalamiento

$$|F| \leq \mu N$$

(8) nos dice que $F > 0 \Rightarrow$

$(\theta : 0 \to 90°)$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cancel{mg}\,\mathrm{sen}\,\theta \le \mu\left(\cancel{mg}\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{\cos\theta}\right)\right)$$

$\mu = \frac{1}{4}$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta \le \frac{1}{4}\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{\cos\theta}\right) \Big/ \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\theta \le \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}^2\theta\right)$$

$$\mathrm{tg}\,\theta \le \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,\mathrm{tg}^2\theta$$

$$\mathrm{tg}^2\theta - 4\,\mathrm{tg}\,\theta + 2 \ge 0$$

(~~recordamos de (3) tg θ = 2ar~~)

en la igualdad:

$$\mathrm{tg}\,\theta_* = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\times1\times2}}{2}$$

$$\mathrm{tg}\,\theta_{*_{1/2}} = 2 \pm \sqrt{2}$$

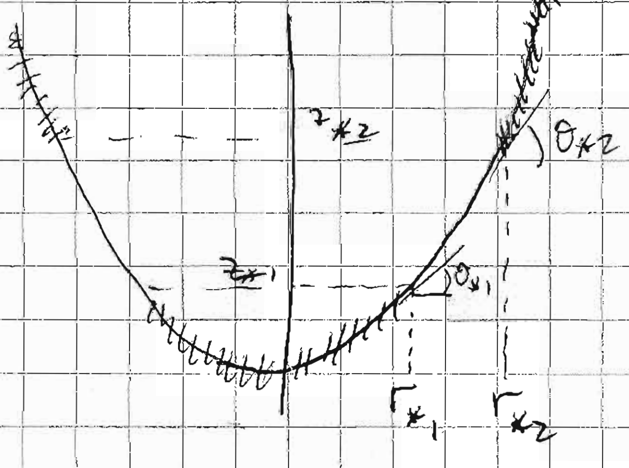
de (3) $\rightarrow$ $$r_{*_{1/2}} = \frac{\operatorname{tg}\theta_{*_{1/2}}}{2a}$$

y de (0):
$$z_{*_{1/2}} = a\, r_{*_{1/2}}^2$$

hay 2 valores de θ_* $\Rightarrow$ hay dos valores de z_*

¿En qué rangos se mantiene en reposo?

Vemos de (8) que $F=0$ en $\theta=0$ y crece con θ $\Rightarrow$ los rangos de z_* son:



Las zonas achuradas son las posibles