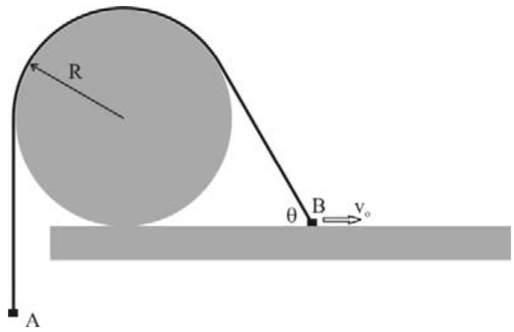
Control 1 8/4/2009 FI2001 Mecánica, Semestre Otoño 2009
Tiempo: 3 Horas Profesor: Ricardo Muñoz M.

1. Considere un sistema de dos bloques, A y B, unidos por una cuerda inextensible de largo L que desliza sobre un cilindro de radio R, el cual está fijo a una superficie horizontal como se muestra en la figura. El bloque B es forzado a moverse sobre la superficie horizontal con rapidez constante v_o. Para el instante cuando $\theta = \pi/3$, determine:



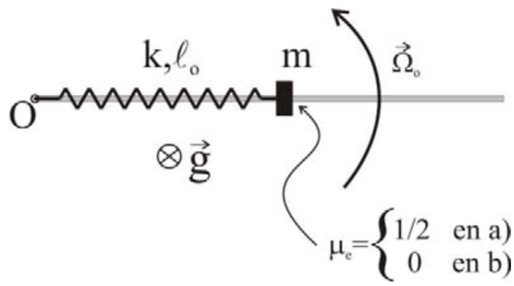
a) Velocidad angular $\dot{\theta}$ en ese instante.

b) Rapidez del movimiento vertical del bloque A en ese instante.

2. Una argolla de masa *m* se encuentra inserta en una vara que gira en un plano horizontal en torno a un punto fijo O con velocidad angular constante Ω_o. La argolla está ligada al punto O mediante un resorte ideal de largo natural ℓ_o y constante elástica k. Considere que se cumple que $\Omega_o^2 = \frac{1}{2}\frac{k}{m}$.

a) Si entre la argolla y la vara existe un coeficiente de roce estático $\mu_e = 1/2$, determine el rango de distancias a O en que la argolla puede permanecer en reposo respecto de la vara.

b) Si entre la argolla y la vara NO EXISTE ROCE de ningún tipo ($\mu_e = \mu_c = 0$), y la argolla es liberada desde el reposo en O, determine el máximo largo que alcanza el resorte y el tiempo que tarda en alcanzarlo.



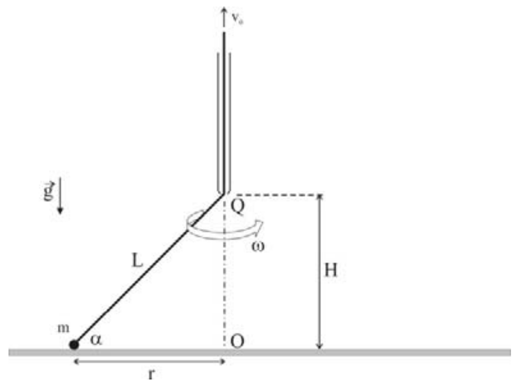
3. Una partícula de masa *m* gira sobre una mesa horizontal con la cual no tiene roce. La partícula está atada a una cuerda ideal cuyo otro extremo pasa por un orificio Q ubicado a una altura *H* sobre el punto O en la mesa (ver figura). La cuerda es recogida a través del orificio a una tasa constante v_o, es decir, $\dot{L} = -v_o$. Se sabe que en el instante en que $r = R$ la partícula gira con velocidad angular $\omega = \omega_o$ en torno al eje OQ. Se pide determinar el valor de $r = r_s$ en que la partícula se separa de la superficie. Se sugiere el siguiente procedimiento:

a) Establezca la relación cinemática que liga a $\ddot{r}$ con r y v_o.

b) Escriba las componentes de la ecuación de movimiento en que aparecen la normal y la tensión de la cuerda.

c) Utilice lo encontrado en a) y el concepto de momento angular para expresar $T(r)$.

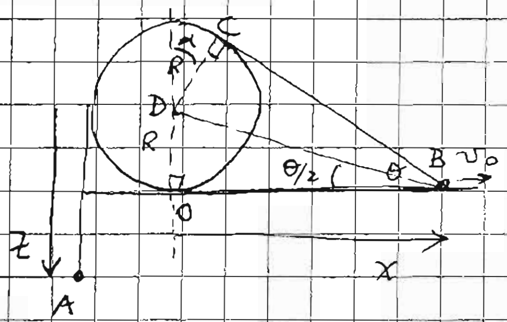
d) Imponga la condición de separación sobre la normal y determine r_s.



C1 2009/1

P1

1/1



los Δs BDO y BDC son idénticos pues son rectángulos y tienen igual hipotenusa e igual cateto $\Rightarrow \overline{CB} = x$

$$\Rightarrow \alpha = \theta$$

Largo de la cuerda

$$L = Z + R\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + x \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$0 = \dot{z} + R\dot{\theta} + \dot{x} \rightarrow \dot{z} = -v_0 - R\dot{\theta} \quad (*)$$

y además

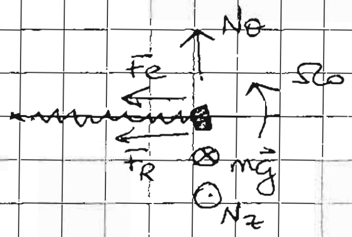
$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{R}{x} \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\,\frac{1}{2}\dot{\theta} = -\frac{R}{x^2}v_0 = \frac{-Rv_0}{\left(\frac{R}{\operatorname{tg}\theta/2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = -\frac{v_0}{R}\,2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \rightarrow \boxed{\dot{\theta} = -\frac{v_0}{2R}} \underset{(*)}{\Rightarrow} \boxed{\dot{z} = -\frac{v_0}{2}}$$

P2



a)

$$-mr\Omega_0^2 = -F_e - F_R \quad (1)$$

$$0 = N_\theta \quad (2)$$

$$0 = N_z - mg \quad (3)$$

$$F_e = k(r - l_0) \quad (4)$$

(4) en (1) $\Rightarrow$ $F_R = mr\Omega_0^2 - k(r - l_0)$

$$\Rightarrow \quad F_R = +(m\Omega_0^2 - k)r + kl_0$$

$$F_R = -m\left(\frac{k}{m} - \Omega_0^2\right)r + kl_0$$

sea $\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$ y me dicen que $\Omega_0^2 = \frac{1}{2}\omega_0^2$

$$\Rightarrow \quad F_R = -\frac{m\omega_0^2}{2} r + kl_0 \quad (5)$$

Debe cumplirse $|\vec{F_R}| \leq \mu_e |\vec{N}|$ (6)

(2) y (3) $\Rightarrow$ $|\vec{N}| = mg$ (7)

$$\left| -\frac{m\omega_0^2}{2} r + k l_0 \right| \leq \mu_e m g \qquad (8)$$

Caso 1) $-\frac{m\omega_0^2}{2} r + k l_0 \geq 0 \Rightarrow r \leq \frac{2 k l_0}{m\omega_0^2}$ (9)

en (8) $\Rightarrow$

$$-\frac{m\omega_0^2 r}{2} + k l_0 \leq \mu_e m g$$

$$\Rightarrow \quad r \geq (k l_0 - m g \mu_e)\frac{2}{m\omega_0^2} \qquad (10)$$

(9) y (10) $\Rightarrow$

$$\frac{2 k l_0}{m\omega_0^2} - \frac{2\mu_e g}{\omega_0^2} \leq r \leq \frac{2 k l_0}{m\omega_0^2} \qquad (*)$$

Caso 2) $-\frac{m\omega_0^2}{2} r + k l_0 \leq 0 \Rightarrow r \geq \frac{2 k l_0}{m\omega_0^2}$ (11)

en (8)

$$\frac{m\omega_0^2 r}{2} - k l_0 \leq \mu_e m g$$

$$\Rightarrow \quad r \leq (k l_0 + \mu_e m g)\frac{2}{m\omega_0^2} \qquad (12)$$

(11) y (12) $\Rightarrow$

$$\frac{2 k l_0}{m\omega_0^2} \leq r \leq \frac{2 k l_0}{m\omega_0^2} + \frac{2\mu_e g}{\omega_0^2} \qquad (**)$$

$\therefore$ el rango completo es $(*)$ y $(**)$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{2 k l_0}{m\omega_0^2} - \frac{2\mu_e g}{\omega_0^2} \leq r \leq \frac{2 k l_0}{m\omega_0^2} + \frac{2\mu_e g}{\omega_0^2}}$$

$\mu_e = \frac{1}{2}$

b)

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -F_e - \cancel{F_R}^{\,0}$$

$$m(\ddot{r} - r\Omega_0^2) = -k(r - l_0)$$

$$\ddot{r} = -(\omega_0^2 - \Omega_0^2)\,r + \frac{k}{m} l_0 \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

pero $\Omega_0^2 = \frac{1}{2}\omega_0^2$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{r} = -\frac{1}{2}\omega_0^2 r + \frac{k}{m} l_0}$$

ecuación diferencial de "resorte" → MAS.

$$r_{eq} = \frac{2kl_0}{m\omega_0^2} = 2l_0$$

cambio de variables: $u = r - \frac{2k\cancel{l_0}}{\cancel{\omega_0^2}}\ 2l_0 = r - 2l_0$

$$\ddot{u} = -\frac{1}{2}\omega_0^2 u$$

$$u = A \cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{2}} t + \delta\right)$$

suponiendo $t = 0 \left\{ \begin{array}{l} \dot{u} = 0 \\ u = -\frac{2kl_0}{m\omega_0^2} = -2l_0 \end{array} \right.$

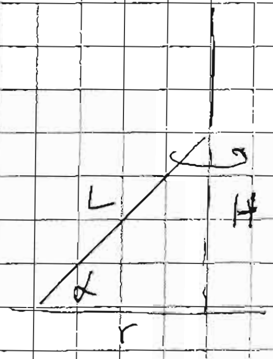
se obtiene $A = -\frac{2kl_0}{m\omega_0^2} \qquad \delta = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{r_{MAX} = \frac{4kl_0}{m\omega_0^2}}} = 4l_0 \qquad \tau = \frac{T}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi\sqrt{2}}{\omega_0}\right) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}\,\pi}{\omega_0}}}$$

C1 2009/1

1/2

(3)



$$L^2 = H^2 + r^2 \qquad (1)$$

$$2L\dot{L} = 2r\dot{r}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{L}{r}(-v_0) = -\frac{v_0 L}{r}$$

$$\ddot{r} = \frac{v_0^2 r - (-v_0 L)\dot{r}}{r^2} = \frac{v_0^2 r + v_0 L \dot{r}}{r^2}$$

$$= \frac{v_0^2 r + v_0 L\left(-\frac{v_0 L}{r}\right)}{r^2} =$$

$$\ddot{r} = \frac{v_0^2}{r^2}\left(r - \frac{L^2}{r}\right) = \frac{v_0^2}{r^3}(-H^2)$$

$$\boxed{\ddot{r} = -\frac{v_0^2 H^2}{r^3}} \qquad (2)$$

En cilíndricas:

$\hat{r}$ $$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -T\cos\alpha \qquad (3)$$

$\hat{k}$ $$0 = N + T\,\mathrm{sen}\,\alpha - mg \qquad (4)$$

$F_\theta = 0 \Rightarrow$ Momento angular vertical es cte

$$r^2 \dot{\theta} = R^2 \omega_0 \qquad (5)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\theta} = \frac{R^2 \omega_0}{r^2} \qquad (6)$$

(2) y (6) en (3)

$$m\left(-\frac{v_0^2 H^2}{r^3} - r\left(\frac{R^4 \omega_0^2}{r^4}\right)\right) = -T\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \quad T\cos\alpha = \frac{m\left(v_0^2 H^2 + R^4 \omega_0^2\right)}{r^3} \qquad (7)$$

en (4) $\rightarrow$

$$N = mg - T\,\text{sen}\,\alpha$$

$$= mg - \underbrace{\text{tg}\,\alpha}_{\frac{H}{r}} \, \frac{m\left(v_0^2 H^2 + R^4 \omega_0^2\right)}{r^3}$$

$$N = mg - \frac{mH\left(v_0^2 H^2 + R^4 \omega_0^2\right)}{r^4}$$

$$N = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{r_s^4 = \frac{H\left(v_0^2 H^2 + R^4 \omega_0^2\right)}{g}}$$