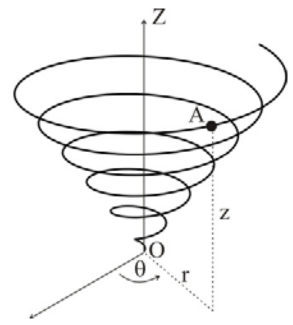
Control 1 6/4/2011 FI2001 Mecánica, Semestre Otoño 2011

Tiempo: 3 Horas Profesor: Ricardo Muñoz M.

1. Un anillo A se mueve inserto en un alambre que ha sido enrollado en torno a un cono de semiángulo 45° con paso constante (es decir, para el sistema de coordenadas cilíndricas de la figura se cumple: $z = r$ y $\frac{dz}{d\theta} = R$, donde R es una constante conocida). Considere que el movimiento de A es tal que su velocidad angular en torno al eje del cono es constante e igual a $\dot{\theta} = \omega_o$, y que en $t = 0$ su distancia al eje es $r = R$.

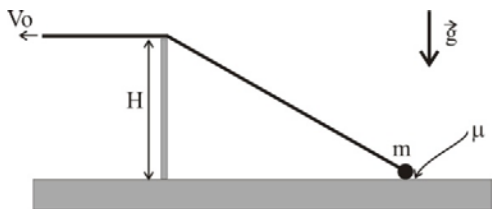


a) Determine la rapidez de A y su distancia al vértice O del cono, en función del tiempo *t*.

b) Determine la magnitud de la aceleración de A en función del tiempo *t*.

c) Determine el radio de curvatura del alambre en la posición inicial del anillo.

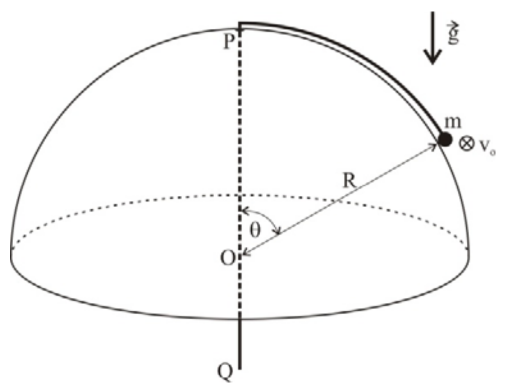
2. Una partícula de masa *m* es tirada por una cuerda ideal que es recogida a tasa v_o pasando por el extremo superior de una barrera vertical de altura *H* como muestra la figura. La partícula desliza sobre una superficie horizontal con la cual tiene un coeficiente de roce cinético de constante μ.



a) Muestre que la magnitud de la aceleración horizontal de la partícula es inversamente proporcional al cubo de su distancia a la barra. Determine la constante de proporcionalidad.

b) Encuentre la distancia a la barrera en que la partícula se separa de la superficie horizontal.

3. Considere una partícula de masa *m* que puede deslizar sin roce sobre un cascarón semiesférico hueco de radio *R*. La partícula se encuentra atada a una cuerda ideal que penetra hacia el interior del cascarón por su punto más alto, P, como muestra la figura.



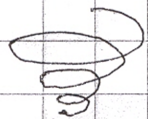
a) Si el extremo Q de la cuerda se mantiene fijo tal que el ángulo cenital de la partícula se mantiene siempre en θ=60°, determine la máxima rapidez v_o que la partícula puede tener, tal que ella describa un movimiento circular uniforme en torno al eje OP sin separarse del cascarón.

b) Si la partícula tiene inicialmente una rapidez acimutal v_1, menor al valor determinado en a), y el extremo Q de la cuerda es tirado hacia abajo con rapidez v_Q, encuentre una expresión para la velocidad angular $\dot{\phi}(\theta)$ y una expresión para la fuerza normal que el cascarón ejerce sobre la partícula en función de θ.

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\,\hat{\phi} \qquad \vec{a} = a_r\,\hat{r} + a_\theta\,\hat{\theta} + a_\phi\,\hat{\phi}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta \qquad a_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d(\dot{\phi}r^2\sin^2\theta)}{dt}$$

1



$$z = r$$

$$\frac{dz}{d\theta} = R$$

$$\dot{\theta} = \omega_0$$

$$r(0) = R$$

a) $\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \dot{z}\,\hat{k}$

$$\dot{z} = \frac{dz}{d\theta}\,\dot{\theta} = R\omega_0 = \dot{r} \rightarrow r = R + R\omega_0 t$$

$$\therefore \vec{v} = R\omega_0\,\hat{r} + (R + R\omega_0 t)\,\omega_0\,\hat{\theta} + R\omega_0\,\hat{k}$$

$$\boxed{v = \left(2(R\omega_0)^2 + (R + R\omega_0 t)^2\omega_0^2\right)^{1/2}}$$

$$\vec{r} = r\,\hat{r} + z\,\hat{k}$$

$$= (R + R\omega_0 t)\,\hat{r} + (R + R\omega_0 t)\,\hat{k}$$

$$\boxed{r = \sqrt{2}\,(R + R\omega_0 t)}$$

b) $\vec{a} = (\cancel{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\cancel{\ddot{\theta}})\hat{\theta} + \cancel{\ddot{z}}\hat{k}$

$$= -(R + R\omega_0 t)\omega_0^2 \hat{r} + 2R\omega_0^2 \hat{\theta}$$

$$\boxed{a = R\omega_0^2 \left[4 + (1+\omega_0 t)^2\right]^{1/2}}$$

c) $\rho_0 = \dfrac{v_0^3}{|\vec{a}_0 \times \vec{v}_0|}$

$v_0 = \sqrt{3}\, R\omega_0$

$\vec{a}_0 = -R\omega_0^2 \hat{r} + 2R\omega_0^2 \hat{\theta} = R\omega_0^2(-\hat{r} + 2\hat{\theta})$

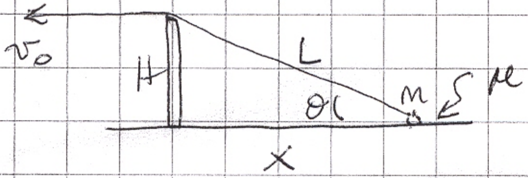
$\vec{v}_0 = R\omega_0 \hat{r} + R\omega_0 \hat{\theta} + R\omega_0 \hat{k}$
$= R\omega_0(\hat{r} + \hat{\theta} + \hat{k})$

$\vec{a}_0 \times \vec{v}_0 = R^2\omega_0^3(-\hat{k} + \hat{\theta} - 2\hat{k} + 2\hat{r})$
$= R^2\omega_0^3(-3\hat{k} + \hat{\theta} + 2\hat{r})$

$$\rho_0 = \frac{3^{3/2} R^3 \omega_0^3}{R^2\omega_0^3 \sqrt{9+1+4}} = \underline{\sqrt{\frac{27}{14}}\, R}$$

1/2

(2)



a) $\cancel{tg}$ $H^2 + x^2 = L^2 \quad \Big| \cdot \frac{d}{dt}$

$$\cancel{2} x \dot{x} = \cancel{2} L \dot{L}$$

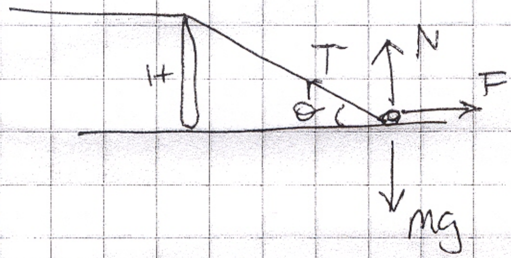
pero $\dot{L} = -v_0 \rightarrow \quad \dot{x} = \frac{-L v_0}{x}$

$$\ddot{x} = \frac{v_0^2 x - (-L v_0)\dot{x}}{x^2} = \frac{v_0^2 x + L v_0 \left(-\frac{L v_0}{x}\right)}{x^2}$$

$$= \frac{v_0^2 x - \frac{L^2 v_0^2}{x}}{x^2} = \frac{v_0^2}{x^2}\left(\frac{x^2 - L^2}{x}\right)$$

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{-v_0^2 H^2}{x^3}}$$

b)



$$\hat{i}):\quad m\ddot{x} = F - T\cos\theta \qquad (1)$$

$$\hat{j}):\quad m\ddot{y} = 0 = N - mg + T\,\text{sen}\,\theta \qquad (2)$$

$$F = \mu N \qquad (3)$$

$$\ddot{x} = -\frac{v_0^2 H^2}{x^3} \qquad (4)$$

(3), (4) en (1) $\rightarrow$ $$T = \frac{1}{\cos\theta}\left[\mu N + \frac{v_0^2 H^2 m}{x^3}\right]$$

en (2) $\rightarrow$ $$0 = N - mg + \text{tg}\,\theta\left(\mu N + \frac{v_0^2 H^2 m}{x^3}\right)$$

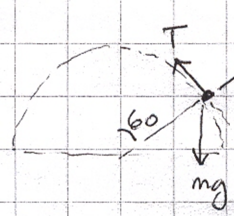
$$\Rightarrow\quad N = \frac{mg - \text{tg}\,\theta\,\frac{v_0^2 H^2 m}{x^3}}{1 + \mu\,\text{tg}\,\theta}$$ pero $\text{tg}\,\theta = \frac{H}{x}$

$N = 0 \Rightarrow$ $$\boxed{x_s^4 = \frac{v_0^2 H^3}{g}}$$

P3

a)

Movimiento circular uniforme



$\hat{k}: \quad 0 = N \operatorname{sen} 30 + T \cos 30 - mg$

$\hat{r}: \quad -mR \operatorname{sen} 60 \, \dot{\theta}^2 = -T \cos 60 + N \cos 30$

$v_{max} \rightarrow N = 0$

$$\Rightarrow T = \frac{mg}{\cos 30} \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{mg}{\cos 30} \cos 60 \frac{1}{mR \operatorname{sen} 60} = \frac{g}{R} \frac{2}{3}$$

$$v_0 = R \operatorname{sen} 60 \, \dot{\theta} = R \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{g}{R}} \sqrt{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{gR}}}$$

b) usando coordenadas esféricas: $r = R \quad \dot{r} = \ddot{r} = 0$

$\dot{\theta} = v_Q / R \quad \ddot{\theta} = 0$

$$\hat{r}) \quad m(\cancel{\ddot{r}}^{\,0} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2\theta) = N - mg\cos\theta$$

$$-mR\left(\frac{v_Q}{R}\right)^2 - mR\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2\theta = N - mg\cos\theta$$

$$\hat{\phi}) \quad F_\phi = 0 \Rightarrow \dot{\phi} r^2 \operatorname{sen}^2\theta = \text{constante} \Rightarrow \dot{\phi} \operatorname{sen}^2\theta = h_0 = \text{cte}$$

$$\therefore \boxed{N = mg\cos\theta - mR\left(\frac{v_Q}{R}\right)^2 - mR\frac{h_0^2}{\operatorname{sen}^2\theta}}$$

$$h_0 = \frac{v_1}{R \operatorname{sen} 60} \operatorname{sen}^2 60 = \underline{\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{v_1}{R}}$$