Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1002-3 Cálculo Diferencial e Integral
01 de Abril de 2015

Clase Auxiliar #3: Derivadas, Regla de L'Hopital y TVM

Profesora: Natacha Astromujoff
Profesor Auxiliar: Nicolás Zalduendo

P1. Calcule las siguientes derivadas:

(i) $\operatorname{sen}(x)\cos(x)$ (ii) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ (iii) $\dfrac{e^x \ln(x)}{x^2}$

P2. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables que cumplen las siguientes propiedades:

(i) $g(x) = xf(x) + 1$ (ii) $g(x+y) = g(x)g(y)\ \forall x, y$ (iii) $f(0) = 1$

Pruebe que $g'(x) = g(x)$.

P3. Considere la función:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x(x-1)}$$

Demuestre que f es continua en su dominio y, de ser posible, repárela para que sea continua en todo $\mathbb{R}$.

P4. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y de derivada continua tal que $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$\lim_{\delta \to 0} \left(\frac{f(x + x\delta)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{\delta}}$$

existe, es positivo, y calcúlelo.

P5. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $0 < a < b$, continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Se sabe además que $\frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b}$. Pruebe que $\exists x_0 \in (a, b)$ tal que:

$$x_0 f'(x_0) = f(x_0)$$

P6. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable con $f(2) = 0$. Definimos además $F(x) = (x-1)^2 f(x)$. Pruebe que existe $\xi \in (1, 2)$ tal que $F''(\xi) = 0$.

P7. Sea $\alpha \in (0, 1)$. Pruebe que $\forall x \in [0, 1]$ se cumple que:

$$x^\alpha \leq \alpha x + (1 - \alpha)$$

Indicación: Defina $f(x) = \alpha x - x^\alpha$ y aplique TVM apropiadamente.