Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1002-3 Cálculo Diferencial e Integral
08 de Abril de 2015

Clase Auxiliar #4: Aplicaciones de la Derivada

Profesora: Natacha Astromujoff
Profesor Auxiliar: Nicolás Zalduendo

P1. Sea $\alpha \in (0,1)$. Pruebe que $\forall t \in [0,1]$ se cumple que:

$$t^\alpha \leq \alpha t + (1-\alpha)$$

Indicación: Defina $f(x) = \alpha x - x^\alpha$ y aplique TVM apropiadamente.

P2. Considere la función $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x^2)}$. Se pide:

(a) Dominio, paridad y signos de f.

(b) Continuidad, reparando donde corresponda. Asíntotas.

(c) Cálculo de $f'(x)$ para $x \neq 0$ y si es posible $f'(0)$. Analaice crecimientos. Encuentre máximos y mínimos.

(d) Cálculo de $f''(x)$ para $x \neq 0$. Estudie concavidad, convexidad e inflexiones.

(e) Gráfico aproximado, señalando valores principales y recorrido.

P3. **(a)** Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x + b^x$, con $a, b \in \mathbb{R},\ a > 1,\ b > 0$.
Demuestre que si $a\ln(a) + b\ln(b) = 0$, entonces $a^x + b^x \geq a + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$, es decir, $\overline{x} = 1$ es mínimo global de f. Para esto proceda como sigue:

(i) Calcule $f'(x)$ y demuestre, usando la propiedad, que puede escribirse como:

$$f'(x) = a^x \ln(a)\left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{x-1}\right]$$

(ii) Pruebe que $0 < b < 1$. Calcule $f'(1)$. Estudie crecimientos de f. Concluya.

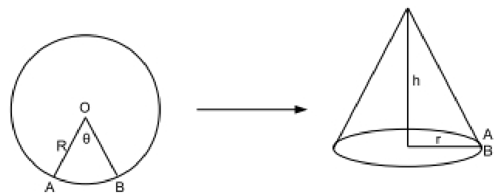
(b) Considere la función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$h(x) = x^{13} + 7x^3 - 5$$

(i) Demuestre que existe un único real $x_0 \in [0,1]$ tal que $h(x_0) = 0$.

(ii) Pruebe que $\overline{x} = 0$ es un punto de inflexión de h.

P4. A partir de un círculo de papel de radio R, se desea construir un cono recortando la figura AOB de radio central θ, y juntando los trozos OA y OB de manera que coincidan. Se formará de esta manera un cono recto circular cuya base es un círculo de perímetro igual a la longitud del arco que queda después del corte, y su altura h puede deducirse de la figura siguiente:



Se pide encontrar el valor de θ que maximice el volumen del cono. Para eso proceda como se indica:

(a) Demuestre que el radio del cono es $r = R\left(1 - \dfrac{\theta}{2\pi}\right)$.

(b) Demuestre que la altura del cono es $h = R\sqrt{1 - \left(1 - \dfrac{\theta}{2\pi}\right)^2}$.

(c) Verifique que con la sustitución $x = 1 - \dfrac{\theta}{2\pi}$ el volumen del cono queda:

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi R^3 x^2 \sqrt{1 - x^2}$$

(d) Analice $V(x)$ indicando: dominio, ceros, signos de $V(x)$, paridad, cálculo de $V'(x)$, crecimiento y deduzca el valor de x que hace máximo a $V(x)$.

(e) Calcule el volumen máximo del cono y el valor de θ que lo genera.