MA2001-4 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: José Palacios A, Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 1

16 de Marzo de 2015

1. Resumen

Definición 1. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, se define el producto punto de x e y como $x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Definición 2. Se define la norma de un vector $x \in \mathbb{R}^n$ como $||x|| = \sqrt{x \cdot x}$.

Proposición 1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** $|x \cdot y| \leq ||x||||y||, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Definición 3. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, llamaremos ángulo entre x e y a $\theta = \arccos\left(\frac{x \cdot y}{||x||||y||}\right)$

Definición 4. Llamaremos grafo de una función $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ al conjunto $G(f) = \{(x, f(x) : x \in D)\}$.

Definición 5. Si $m = 1$, dado $c \in \mathbb{R}$, se define el conjunto de nivel de una función f como $N_c(f) := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}$. S

2. Problemas

P1. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

a) Demuestre que $|x \cdot y| = ||x||||y||$ sí y solo sí existe un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $y = \lambda x$.

b) Deduzca que $||x + y|| = ||x|| + ||y||$ implica que $y = \lambda x$, con $\lambda > 0$.

P2. Demostrar las siguientes identidades:

a) $x \cdot y = \frac{1}{4}(||x + y||^2 - ||x - y||^2), \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

b) $||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2), \ \forall x, y \in \mathbb{R}^2$.

P3. Hallar las curvas de nivel de las siguientes superficies obtenidas al hacer cortes por planos paralelos a los planos coordenadas. Representar la superficie e identificarla.

a) $z = x^2 + y^2$

b) $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

P4. Dinujar las curvas de nivel y la gráfica de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

a) $f(x, y) = \text{máx}\{|x|, |y|\}$.

b) $f(x, y) = \frac{x}{1 + y^2}$.