

CURSO: MA22A-02 CALCULO EN VARIAS VARIABLES

PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR

FECHA: 27 / 12 / 2003

TIEMPO: 2:45 HORAS

CONTROL #1

1.-

A) Sean f y g de R^2 en R , superficies definidas por:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$g(x, y) = 6 - x^2 - y^2$$

Se pide:

- a) Representar analítica y gráficamente la intersección de las superficies
- b) Determine analíticamente su interior, adherencia, puntos de acumulación. ¿Es cerrado? ¿Es abierto? ¿Es compacto? ¿Es completo?. Justifique.

B) Determine analítica y gráficamente los siguientes subconjuntos de R^3 :

- a) Conjunto de todos los (x, y, z) cuya distancia al eje y es 2
- b) Conjunto de todos los (x, y, z) cuya distancia al plano yz es 3
- c) Conjunto de todos los (x, y, z) cuya distancia al eje z es igual a la distancia al plano xy .

2.- Sea $C[0,1] = \{f : [0,1] \rightarrow R / f \text{ continua}\}$. Se definen:

$$d_{\infty}(f, g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| \quad \text{y} \quad d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

- a) Muestre que d_{∞} y d_1 son métricas.
- b) Muestre que $(C[0,1], d_{\infty})$ es completo.
- c) Sea la siguiente sucesión de funciones:

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & x \in [0, 1/2 - 1/n[\\ n(x - 1/2) & x \in [1/2 - 1/n, 1/2 + 1/n] \\ 1 & x \in]1/2 + 1/n, 1] \end{cases}$$

¿Es $\{f_n\}$ de Cauchy en $(C[0,1], d_1)$? ¿Es completo $(C[0,1], d_1)$?

3.- a) (5 pts) Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en todo su dominio:

$$\text{i) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & \sim \end{cases}$$

ii) $g(x, y) = \sqrt{x - y + 1}$ en $D = \{(x, y) / y < x + 1\}$

iii) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2(x^3 + y^2) + x^4}{x^4 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{otro caso} \end{cases}$

iv) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2|y|^a}{x^6 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

v) $h(x, y) = \begin{cases} \frac{x \cos y - y \cos x - x + y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Recuerde que $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1}{2}$

b) (1 pto.) Determine si existe el siguiente límite y calcule su valor en caso de existir:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, a)} \frac{(x - y)a^n + (a - x)y^n - (a - y)x^n}{(x - y)(a - x)(a - y)}$$