

## CONTROL II CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES, 2010/1

Profs. Juan Dávila, Manuel del Pino

Tiempo: 2.5 hrs.

(1) (a) Sea

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} e^{-3x} \sin(x^2 y) \\ e^x \cos(2x^2 y) \end{pmatrix}.$$

Demuestre que  $f$  es diferenciable en todo punto de  $\mathbb{R}^2$ .

(b) Calcule la aproximación lineal afín  $T(x, y)$  de  $f$  cerca de  $(0, 0)$ , y la ecuación del plano tangente en  $(0, 0, 7)$  al gráfico de la función

$$g(x, y) = f(x, y) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(2) Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy \sin x}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Determine si  $f$  es continua en  $(0, 0)$ .

(b) Para  $e \in \mathbb{R}^2$  con  $\|e\| = 1$  determine, si existe, la derivada direccional  $f'((0, 0); e)$ . Calcule, si existen, derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

(c) Determine si  $f$  es diferenciable en  $(0, 0)$ .

(3) (a) Encuentre (sin demostración) interior, adherencia y frontera de los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$ .

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{Q}, y > x^2\},$$

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 1, y = \sin(1/x)\}.$$

(b) Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en todo punto. Considere el epígrafo de  $f$ , dado por

$$\text{Epi}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z \geq f(x, y)\}.$$

Demuestre que  $\text{Epi}(f)$  es cerrado.

(c) Sea  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que

- $f(0) > 0$ , y
- $f(x) < 0$  para todo  $x$  con  $\|x\| > 1$ .

Demuestre que existe  $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$  tal que

$$f(x) \leq f(\bar{x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

## CONTROL II CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES, 2010/1

Profs. Juan Dávila, Manuel del Pino

(1) (a) (3 pts.) Sea

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} e^{-3x} \sin(x^2 y) \\ e^x \cos(2x^2 y) \end{pmatrix}.$$

Demuestre que  $f$  es diferenciable en todo punto de  $\mathbb{R}^2$ .

**Solución.** Las derivadas parciales de esta función están dadas por

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = e^{-3x}[-3 \sin(x^2 y) + 2xy \cos(x^2 y)],$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = e^{-3x} x^2 \cos(x^2 y)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = e^x[-4xy \sin(2x^2 y) + \cos(2x^2 y)],$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = -e^x 2x^2 \sin(x^2 y).$$

Estas funciones son continuas en todo punto  $(x, y)$ , al estar constituidas por productos y sumas de funciones que son composición de polinomios y funciones de una variable continuas (trigonométricas y exponencial). Al ser continuas las derivadas parciales, la función  $f$  es diferenciable en todo punto.  $\square$

(b) (3 pts.) Calcule la aproximación lineal afín  $T(x, y)$  de  $f$  cerca de  $(0, 0)$ , y la ecuación del plano tangente en  $(0, 0, 7)$  al gráfico de la función

$$g(x, y) = f(x, y) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

**Solución.** Tenemos que

$$f'(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}.$$

Así,

$$T(x, y) = f(0, 0) + f'(0, 0) \begin{bmatrix} x - 0 \\ y - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + x \end{bmatrix}.$$

El plano tangente al gráfico de  $g$  en  $(0, 0, 7)$  está dado por la ecuación

$$z = T(x, y) \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} = 7(1 + x). \quad \square$$

(2) Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy \sin x}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) (2 pts.) Determine si  $f$  es continua en  $(0, 0)$ .

**Solución.** Sea  $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$ . Entonces, como

$$|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad |\sin x| \leq |x|,$$

se sigue que

$$0 \leq |f(x_n, y_n)| \leq \frac{|x_n|}{2} \rightarrow 0$$

si  $n \rightarrow \infty$ . Concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = 0 = f(0, 0),$$

de modo que  $f$  es continua en  $(0, 0)$ .  $\square$

(b) (2 pts.) Para  $e \in \mathbb{R}^2$  con  $\|e\| = 1$  determine, si existe, la derivada direccional  $f'((0, 0); e)$ . Calcule, si existen, derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

**Solución.** Consideremos  $e \in \mathbb{R}^2$  con  $\|e\| = 1$ ,  $e = (e_1, e_2)$ . Tenemos

$$\begin{aligned} f'((0, 0); e) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(te_1, te_2) - f(0, 0)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e_1 e_2 \sin(te_1)}{t(e_1^2 + e_2^2)} = e_1^2 e_2 \end{aligned}$$

de modo que, en particular

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = f'((0, 0); (1, 0)) = 0 = f'((0, 0); (0, 1)) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

$\square$

(c) (2 pts.) Determine si  $f$  es diferenciable en  $(0, 0)$ .

**Solución.** Si  $f$  fuese diferenciable en  $(0, 0)$ , se tendría que

$$f'((0, 0); e) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)e_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)e_2 = 0.$$

Pero,  $f'((0, 0); e) = e_1^2 e_2 \neq 0$  si  $e_1, e_2 \neq 0$ . Así,  $f$  no es diferenciable en  $(0, 0)$ .  $\square$

(3) (a) (2 pts.) Encuentre (sin demostración) interior, adherencia y frontera de los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$ .

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{Q}, y > x^2\},$$

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x < 1, y = \sin(1/x)\}.$$

**Solución.** Se tiene que

$$\text{Adh}(A_1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x^2\}, \quad \text{Int}(A_1) = \emptyset, \quad \text{Fr}(A_1) = \text{Adh}(A_1),$$

y por otra parte,

$$\begin{aligned} \text{Adh}(A_2) &= \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x \leq 1, y = \sin(1/x)\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq y \leq 1\}, \\ \text{Int}(A_2) &= \emptyset, \quad \text{Fr}(A_2) = \text{Adh}(A_2). \end{aligned}$$

□

(b) (2 pts.) Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en todo punto. Considere el epígrafo de  $f$ , dado por

$$\text{Epi}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z \geq f(x, y)\}.$$

Demuestre que  $\text{Epi}(f)$  es cerrado.

**Solución.** Debemos probar que  $\text{Adh}(A) \subset A$ .

Sea  $(x, y, z) \in \text{Adh}(A)$ . Debemos mostrar que  $(x, y, z) \in A$ . Por hipótesis, existe una sucesión

$$(x_n, y_n, z_n) \in A \rightarrow (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

de modo que

$$(x_n, y_n) \rightarrow (x, y), \quad f(x_n, y_n) \leq z_n \rightarrow z.$$

Como  $f$  es continua en el punto  $(x, y)$ , se sigue que

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = f(x, y),$$

y en consecuencia  $(x, y, z) \in A$ . Esto concluye la demostración. □

(c) (2 pts.) Sea  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que

- $f(0) > 0$ , y
- $f(x) < 0$  para todo  $x$  con  $\|x\| > 1$ .

Demuestre que existe  $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$  tal que

$$f(x) \leq f(\bar{x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

**Solución.** Sea  $A = \{x / \|x\| \leq 1\}$ . Como  $A$  es cerrado y acotado, y  $f$  es continua en  $A$ , se sigue que  $f$  alcanza su máximo sobre  $A$ . Así, existe  $\bar{x} \in A$  tal que

$$f(x) \leq f(\bar{x}) \quad \forall x \in A.$$

Por hipótesis, se tiene que

$$f(x) < 0 < f(0) \leq f(\bar{x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus A.$$

Concluimos que

$$f(x) \leq f(\bar{x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

como se deseaba. □