

MA2001-4 Cálculo en Varias Variables

Profesor: Alejandro Jofré

Auxiliar: José Armesto, Sebastián Urzúa B.



Auxiliar 3

30 de Marzo de 2015

1. Resumen

Teorema 1 (Bolzano Weierstrass). Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Luego, A es compacto si y solo si $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$, (x_n) tiene subsucesión convergente en A .

Definición 1. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, y sea $\bar{x} \in A$. Decimos que f es continua en \bar{x} ssi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \text{ tal que } (\forall x) \text{ tq } \|x - \bar{x}\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(\bar{x})\| \leq \varepsilon$$

Proposición 1. Una función f es continua en x_0 ssi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Teorema 2. Sea $f : K \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, con K compacto. Luego f alcanza su valor máximo y mínimo en K .

2. Problemas

P1. (a) Sea $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Estudie la existencia del límite en $(0, 0)$. Es una función continua?

(b) Sea $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera contenida en la recta $y = x$, y sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-y)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n)$, cuando $(x_n, y_n) \rightarrow 0$. Qué puede decir de la continuidad de f ?

P2. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B \subset \mathbb{R}^m$, donde A es cerrado y acotado, f es continua y biyectiva. Pruebe que $f^{-1} : B \rightarrow A$ es continua.

P3. Sea $\phi : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y defina $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \phi\left(\frac{x}{\|x\|}\right).$$

a) Demuestre que el conjunto $\{y \in \mathbb{R}^N, \|y\| = 1\}$ es cerrado en \mathbb{R}^N .

b) Demuestre que f alcanza sus valores máximo y mínimo sobre $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. *Indicación: considere la parte anterior.*

c) Demuestre que si f no es una función constante, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe.

P4. Determine si las siguientes funciones son continuas:

(I) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} (2x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^4 + 2y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(II) $g : [0, \frac{\pi}{4}] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x, y) = \begin{cases} \tan(xy)^{\frac{1}{1-\tan(xy)}} & \text{si } (x, y) \neq (\frac{\pi}{4}, 1) \\ e^{-1} & \text{si } (x, y) = (\frac{\pi}{4}, 1). \end{cases}$$