MA2001-1 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Alejandro Jofré.
Auxiliar: José Palacios A., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 5

13 de Abril de 2015
lo que es nada

1. Resumen

Definición 1. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A abierto. Sea e_j el j-ésimo elemento de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Se define la **derivada parcial de f en x con respecto a x_j** como:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h}$$

Definición 2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A abierto, $x_0 \in A$. Se define la **matriz Jacobiana de f en x_0** como:

$$(Df(x_0))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$$

Definición 3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A abierto, $x_0 \in A$. f **es diferenciable en x_0** si sus derivadas parciales existen, y además:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{||f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)||}{||x - x_0||} = 0$$

Definición 4. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $x_0 \in A$. Se dice que $L(h) = f(x_0) + Df(x_0)h$ aproxima a $f(x_0 + h)$ cerca de $h = 0$. Además, se tiene que

$$\lim_{h \to 0,\ h \neq 0} \frac{f(x_0 + h) - L(h)}{||h||} = 0$$

Teorema 1. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tal que sus derivadas parciales existen en una vecindad de $x_0 \in A$ y son continuas en x_0. Entonces f es diferenciable en x_0.*

Definición 5. Se define el **plano tangente** de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en (x_0, y_0) como:

$$z = f(x_0, y_0) + \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

2. Problemas

P1. Estudie la diferenciabilidad de $f(x, y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$ por definición. Encuentre su aproximación lineal en el punto $(3, 2)$.

P2. Considere

$$f : \mathbb{R}^n \setminus (\{0\}) \to \mathbb{R}^n$$
$$\vec{x} \to f(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{||\vec{x}||_2^2}$$

Calcule el Jacobiano de f.

P3. Hallar la ecuación del plano tangente de las siguientes superficies, en los puntos indicados:

a) $f(x,y) = x^2 + y^4 - e^{xy}$, en $(1,0,0)$

b) $f(x,y) = \cos x \sin y$, en $(0,\pi/2,1)$

c) ¿Dónde corta al eje z el plano tangente a $f(x,y) = e^{x-y}$ en $(1,1,1)$?

P4. Considere $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$, $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : 4 < x^2 + y^2 \leq 9\}$. Para $\lambda \in \mathbb{R}$ se define:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 - \lambda, & si \quad (x,y) \in D_1 \\ 0, & si \quad (x,y) \in D_2. \end{cases}$$

(I) Encuentre λ tal que f sea continua en $D_1 \cup D_2$. De ahora en adelante, se considera dicho valor de λ.

(II) Pruebe que el grafo de f:

$$Gr(f) := \{(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D_1 \cup D_2\}$$

es cerrado y acotado.

(III) Pruebe que, dado cualquier $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$, existe un punto en el grafo de f que minimiza la distancia a (x_0,y_0,z_0).

P5. Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función continua tal que:

- $f(0) > 0$
- $f(x) < 0$ para todo x con $||x|| > 1$.

Demuestre que existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ tal que $f(x) \leq f(\bar{x}), \forall x \in \mathbb{R}^N$.