MA2001-4 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Alejandro Jofré.
Auxiliar: José Palacios A., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 13

03 de Agosto de 2015

1. Resumen

Teorema 1 (Teorema de Fubini en $\mathbb{R}^2$)**.** *Sea $R = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ rectángulo, $fR \to \mathbb{R}$.*

1. *Si f integrable en R y $\forall x \in [a,b]$, $f(x,\cdot)$ integrable en $[c,d]$, entonces*
$$\int_R f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, ydy) \right) dx.$$
2. *Si f es continua en R, entonces*
$$\int_R f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

2. Problemas

P1. Considere
$$I = \int_0^1 \int_0^y (x^2+y^2)dxdy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2+y^2)dxdy.$$

a) Calcule I directamente.

b) Dibuje la región de integración

c) Calcule I invirtiendo el orden de integración.

P2. *a*) Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrable. Pruebe que
$$\int_0^1 \left(\int_x^1 g(t)dt \right) dx = \int_0^1 tg(t)dt.$$

b) Usando adecuadamente lo anterior, calcule la integral
$$\int_0^1 \int_x^1 (x-w)\sin(x^3)dxdw.$$

P3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$. El objetivo de este problema es demostrar el Teorema de Schwartz:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$
usando el Teorema de Fubini. Para ello, siga los pasos detallados a continuación.

a) Defina la función
$$g(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y),$$
e intégrela sobre un rectángulo $\mathcal{R} = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ arbitrario.

b) Justifique el hecho de que una función continua es nula si y sólo si su integral calculada sobre cualquier rectángulo es nula, y concluya el resultado buscado.