

CONTROL I MA 22A, 2006/1

Prof. M. del Pino, Prof. Aux. C. Muñoz

Tiempo: 3 hrs.

- (1) (a) Encuentre (sin demostración) adherencia, interior y frontera en \mathbb{R}^2 de los conjuntos

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < |x|, x^2 + y^2 \leq 5\},$$

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) \mid m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

- (b) Demuestre que el conjunto $S = \{y \in \mathbb{R}^N \mid \|y\| = 1\}$ es cerrado en \mathbb{R}^N .

- (2) Sea $\phi : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, relativamente a $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, y defina $f : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \phi \left(\frac{x}{\|x\|} \right).$$

- (a) Demuestre que f alcanza sus valores máximo y mínimo sobre $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. *Indicación: Considere la parte (b) del problema 1.*

- (b) Demuestre que si f no es una función constante entonces el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

no existe.

- (c) Determine si existe el límite

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 y z}{x^4 + y^2 x^2 + z^4}.$$

- (3) (a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2} & \text{si } x^2 \neq y^2 \\ 1 & \text{si } x^2 = y^2. \end{cases}$$

Demuestre que f es continua en todo punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

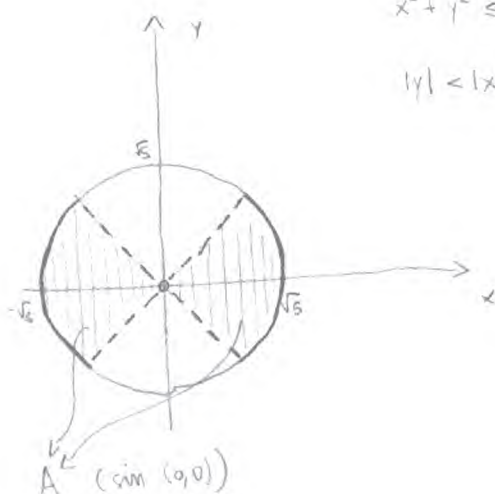
- (b) Determine si existe el límite

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 y z}{\sqrt{x^{12} + y^6 + z^4}}.$$

P11

a) Encontrar adherencia, interior y frontera en \mathbb{R}^2 de

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < |x|, x^2 + y^2 \leq 5 \} \quad \text{y} \quad B = \left\{ \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) \mid m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

Sol: Dibujemos A y B:

$$x^2 + y^2 \leq 5 \Leftrightarrow \text{círculo cerrado de radio } \sqrt{5}.$$

$$|y| < |x| \Leftrightarrow \text{el módulo de la coord. } x \text{ es más grande que el módulo de la coord. } y.$$

$$\Leftrightarrow \{x > 0 : |y| < x\} \cup \{x < 0 : |y| < -x\}$$

Luego, $\text{Adh } A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq |x| \text{ y } x^2 + y^2 \leq 5 \},$

$$\text{int } A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| < |x| \text{ y } x^2 + y^2 < 5 \} \text{ y}$$

$$\text{Fr } A = \text{Adh } A \setminus \text{Int } A =$$

$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y| \text{ y } x^2 + y^2 < 5 \} \cup$$

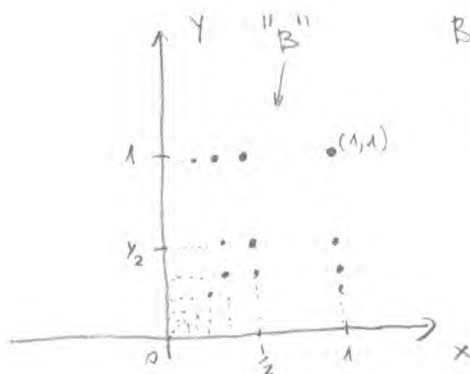
$$\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 5, |x| \geq |y| \}$$

Las líneas
cruzadas

↑
el borde del círculo incluído en \bar{A} .

1.5 pts

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) \mid m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$



B es un conjunto que fijados una coord. x o y , en la otra n ve la sucesión $(\frac{1}{n})$. Notar que ningún pts. de los ejes coordenados está en B.

Luego,

$$\text{Adh } B = B \cup \{ \text{todos los posibles límites de sucesiones en } B \}$$

$$= B \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0 \right) : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \cup \left\{ \left(0, \frac{1}{m} \right) : m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \cup \{ (0,0) \}$$

$$\text{int } B = \emptyset \quad (B \text{ es numerable}) \quad \text{y}$$

$$\text{Fr } B = \text{Adh } B \setminus \text{int } B = \text{Adh } B.$$

1.5 pts

(la sucesión diagonal)

b) Demstrar que $S = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y\|=1\}$ es cerrado en \mathbb{R}^n .

Sol:

1ª forma: (Por continuidad)

$$S = f^{-1}(\{1\}) \quad , \quad f(x) \equiv \|x\| \quad (f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+) \text{, que es } \underline{\text{continua}} \text{ (visto en aul.)}$$

Como $\{1\}$ es cerrado $\Rightarrow S$ es cerrado (imagen de cerrado).

2ª forma: (Por sucesiones)

Sea $(x_n) \subseteq S$ tq $x_n \xrightarrow{(*)} x$. Pdg $x \in S$. En efecto,

$$x_n \in S \Leftrightarrow \|x_n\|=1 \quad , \quad \text{pero}$$

$$0 \leq \left| \overset{1}{\cancel{\|x_n\|}} - \|x\| \right| \leq \|x_n - x\| \xrightarrow{(*)} 0$$

$$\Rightarrow \|x\|=1 \Leftrightarrow x \in S.$$

3 ptos

— o —

P2

Sea $\phi: \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, relativamente a $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Definamos $f: \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(x) = \phi\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$.

a) Demuestra que f alcanza sus valores máximo y mínimo sobre $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

Claramente f es continua en $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ por álgebra y composición de fns. continuas en $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

Para si $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $f(x) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ (En efecto, $f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \phi\left(\frac{\frac{x}{\|x\|}}{\|\frac{x}{\|x\|}\|}\right) = \phi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = f(x)$)

luego, basta buscar la existencia de mínimos y máximos en aquellos puntos $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ con $\|x\| = 1$, i.e., $x \in S$ (cerrado y acotado). Claramente $f|_S$ sigue siendo continua ($f|_S: S \rightarrow \mathbb{R}$) y por ende, por Teorema visto en clase, $f|_S$ alcanza su mínimo y máximo, digamos x_0 y $x_1 \in S$. Pero si $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$,

$$f(x) = \max_S f|_S \geq f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = f(x) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq \min_S f|_S = f(x_0), \text{ con } x_0, x_1 \in S.$$

$\Rightarrow f$ alcanza su máx. y mínimos 2 pto.s

b) Pda si f no es constante entonces el límite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe.

En efecto: tomando $x_n \equiv \frac{1}{n} x$, $y_n \equiv \frac{1}{n} y$, $x, y \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ cualesquiera, tenemos que

$$x_n \rightarrow 0, y_n \rightarrow 0 \text{ y } f(x_n) = \phi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = f(x) \text{ y } f(y_n) = \phi\left(\frac{y}{\|y\|}\right) = f(y)$$

luego, si existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ necesariamente $f(x) = f(y)$, pero x, y son cualquiera.

luego, $f \equiv \text{cte.}$

2 pto.s

c) Determina si el límite $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 y z}{x^4 + y^2 x^2 + z^4} \equiv f(x,y,z)$

Sol: Tomemos $\vec{x}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ e $\vec{y}_n = \left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Claramente $\vec{x}_n, \vec{y}_n \rightarrow 0$. Pero

$$f(\vec{x}_n) = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{3}{n^4}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \text{ y } f(\vec{y}_n) = \frac{-\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = -\frac{1}{3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{3}.$$

luego, $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 y z}{x^4 + y^2 x^2 + z^4}$ no existe.

2 pto.s

P01

a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ def. por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2}, & x^2 \neq y^2 \\ 1, & x^2 = y^2 \end{cases}$$

Pdg. f es continua en \mathbb{R}^2 .

Sol. Si $x^2 \neq y^2$, $f(x,y)$ es continua por álgebra de funciones continuas.

Veamos si $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y)$ existe (con $x_0^2 = y_0^2$) y si es igual a 1.

En efecto, si $(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)$ entonces $x^2 - y^2 \rightarrow x_0^2 - y_0^2 = 0$ (por álgebra de límites). Luego, si $u \equiv x^2 - y^2$,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1 = f(x_0, y_0)$$

$\Rightarrow f$ es continua en (x_0, y_0) , $x_0^2 = y_0^2$. ($\Rightarrow f$ es continua en \mathbb{R}^2).

3 pts

b) Determinar si existe el límite $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 y z}{\sqrt{x^{12} + y^6 + z^4}}$.

Sol. Por intuición, el término que es "más lento" a 0 en el denominador es $\sim \sqrt{z^4} = z^2$ (orden 2), mientras que en el numerador el orden es 4. Es de esperar pues que el límite de arriba exista. En efecto, se sabe que

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{3}(a+b+c), \text{ para } a, b, c \geq 0 \text{ reales.}$$

Tomando $a = x^{12}$, $b = y^6$ y $c = z^4$, se tiene que

$$(x^{12} y^6 z^4)^{1/3} \leq \frac{1}{3}(x^{12} + y^6 + z^4)$$

y por ende,

$$x^4 y^2 z^{4/3} \leq \frac{1}{3}(x^{12} + y^6 + z^4) \Rightarrow$$

$$\boxed{x^2 y z^{2/3} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{x^{12} + y^6 + z^4}} \quad (*)$$

luego, usando (*)

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y z}{\sqrt{x^{12} + y^6 + z^4}} \right| \leq \frac{|x^2 y z|}{\sqrt{3} |x^2 y z^{2/3}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} |z|^{1/3}$$

De aquí, si $(x_n, y_n, z_n) \rightarrow (0, 0, 0)$,

$$0 \leq \lim_{(x_n, y_n, z_n) \rightarrow (0, 0, 0)} \left| \frac{x_n^2 y_n z_n}{\sqrt{x_n^{12} + y_n^6 + z_n^4}} \right| \leq \lim_{(x_n, y_n, z_n) \rightarrow (0, 0, 0)} \frac{1}{\sqrt{3}} |z_n|^{1/3} = 0.$$

\Rightarrow el límite existe y es 0.

3 pts