MA2001-6 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Patricio Felmer A.
Auxiliar: Diego Marchant D.

"La lógica nos hace rechazar ciertos argumentos, pero no nos puede hacer creer ninguno" - Henri Lebesgue

Auxiliar 12

7 de Julio de 2015

1. Demostrar el **Lema de las Particiones Refinadas**: Sea $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ rectángulo, $f : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$, Son equivalentes:

   I) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists m_0 \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})(\forall m \geq m_0)(\forall (c_P)_{P \in P_m(\mathcal{R})}, (c'_P)_{P \in P_{km}(\mathcal{R})})$

$$\sum_{P \in P_m(\mathcal{R})} \sum_{\substack{Q \in P_{km}(\mathcal{R}) \\ Q \subseteq P}} |f(c'_Q) - f(c_P)| V(Q) < \varepsilon$$

   II) f es integrable en $\mathcal{R}$

   NOTA: Este lema corresponde al lema 3.1 del apunte.

2. Sean $f, g : \mathcal{R} = [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones acotadas e integrables sobre $\mathcal{R}$ rectángulo. Demuestre que

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{R}} (f(x)g(y) - f(y)g(x))^2 = \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx - \left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2$$

3. Calcular:

   a)

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 ye^{x^3} dxdy$$

   b)

$$\int_0^\infty \frac{e^{-5x} - e^{-10x}}{x} dx$$

   HINT: Intentar escribir la función dentro de la integral como el resultado de otra integral.