MA2001-6 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Patricio Felmer A.

Guía Resumen Examen

1 Resumen

1.1 Lagrange

Teorema 1. ***(Multiplicadores de Lagrange)****. Sean $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ que designaremos función objetivo y $g_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R};\ i=1,....n$ n funciones que designaremos restricciones. Sea el problema*

$$\begin{aligned}(P)\quad &(min, max)\ f(x)\\ &g_i(x)=c, \qquad i=1,...,n\end{aligned}$$

Se define el Lagrangeano como $\mathcal{L}(x,\lambda)=f(x)-\sum_{i=1}^n\lambda_i g_i(x)$, entonces si existe un $\overline{x}$ que es solución del problema (P) entonces existe un $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(\overline{x})=\sum_{i=1}^n\lambda_i\nabla g_i(\overline{x})$$

1.2 TFI

Teorema 2. ***(TFInverso)****: Sea f de clase $\mathcal{C}^1$ una función tal que $f(a)=b$ y $Df(a)$ es invertible, entonces f biyectiva en un entorno de a y admite una inversa tal que*

$$Df^{-1}(b)=[Df(a)]^{-1}$$

Teorema 3. ***(TFImplícito)****: Sea $F(x,y)$ de clase $\mathcal{C}^1$, tal que $F(x_0,y_0)=0$ y $D_yF(x_0,y_0)$ sea invertible. Entonces se puede despejar implícitamente $y=y(x)$ en un entorno U de x_0 tal que*

$$F(x,y(x))=0,\quad \forall\ x\in U$$

1.3 Integración

Teorema 4. ***(Teorema de Fubini en $\mathbb{R}^2$)****. Sea $R=[a,b]\times[c,d]\subseteq\mathbb{R}^2$ rectángulo, $f:R\to\mathbb{R}$.*

1. *Si f integrable en R y $\forall x\in[a,b], f(x,\cdot)$ integrable en $[c,d]$ entonces*

$$\int_R f=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx.$$

2. *Si f continua en R, entonces*

$$\int_R f=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

Teorema 5. ***(Cambio de Variable)*** *Sea $g:U\to V$ de clase C^1 biyectiva (con inversa de clase C^1). Sea $\Omega\subset U$ y $f:g(\Omega)\to\mathbb{R}$, $x=g(u)$, entonces*

$$\int_{g(\Omega)}f(x)dx=\int_\Omega f(g(u))|detDg(u)|du$$

1.3.1 Parametrizaciones

Definición 1. Coordenadas Cilíndricas:

$$\vec{r}(\rho,\theta,z) = (x(\rho,\theta,z), y(\rho,\theta,z), z(\rho,\theta,z)) = (\rho cos(\theta), \rho sen(\theta), z)$$

$$\rho \in [0,\infty) \quad \theta \in [0,2\pi] \quad z \in \mathbb{R}$$

Definición 2. Coordenadas esféricas:

$$\vec{r}(r,\theta,\varphi) = (rcos(\theta)sen(\varphi), rsen(\theta)sen(\varphi), rcos(\varphi))$$

$$r \in [0,\infty) \quad \theta \in [0,2\pi] \quad \varphi \in [0,\pi]$$

Definición 3. Coordenadas Toroidales:

$$\vec{r}(r,\theta,\varphi) = ((R + rcos(\theta))sen(\varphi), (R + rsen(\theta))sen(\varphi), rcos(\varphi))$$

$$r \in [0,\infty) \quad \theta \in [0,2\pi] \quad \varphi \in [0,\pi]$$

Definición 4. Sea S una superficie simple y regular, y $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de ésta. Si $\rho : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función escalar continua definida en un abierto Ω que contiene a S, definimos la integral de superficie de ρ sobre S mediante:

$$\iint_S \rho dA = \iint_D \rho(\vec{r}(u,v)) \| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) \| dudv$$

En particular, el área de S se define mediante:

$$A(S) = \iint_D \| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) \| dudv$$

1.3.2 Aplicaciones

Centro de masa Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una placa y $\rho : D \to \mathbb{R}$ la densidad (de masa). Entonces la masa total de la placa está dada por:

$$M = \iint_D \rho$$

y las coordenadas (X_{CM}, Y_{CM}) del centro de masa están dadas por:

$$X_{CM} = \frac{\iint_D x\rho(x,y)dydx}{M}$$

$$Y_{CM} = \frac{\iint_D y\rho(x,y)dydx}{M}$$

(Esto puede extenderse a $\mathbb{R}^3$)