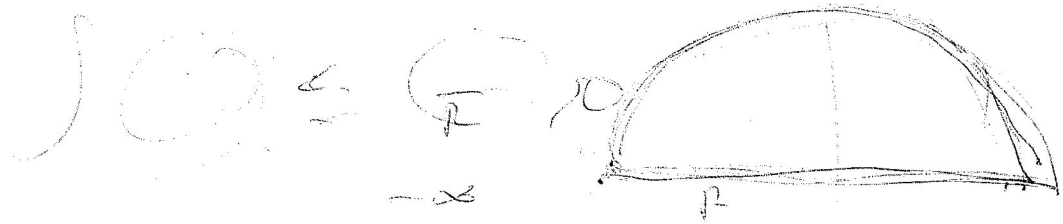

EXAMEN CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES, 2015/1

(1) Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, \ y > 0\}$. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 + xy + \ln\left(\frac{1}{x^2 y}\right).$$

(a) (3.0 pts) Encuentre los puntos críticos de f y clasifíquelos de acuerdo a si la función alcanza un mínimo local en ellos, un máximo local, o son puntos silla.

Solución: Se sabe de antemano que para una función diferenciable y estrictamente convexa, todos sus puntos críticos son mínimos locales, y no puede tener más de uno.

Procedemos a buscar el único punto crítico, en caso de que exista.

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(0.5) enunciar condición}$$

luego, $\frac{x}{2} + y - \frac{2}{x} = 0$

$$2y + x - \frac{1}{y} = 0 \qquad \text{(0.5) establecer ecuaciones}$$

Una manera de resolver el sistema es la siguiente: de la primera ecuación $y = \frac{2}{x} - \frac{x}{2} = \frac{4-x^2}{2x}$; reemplazando en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4 - x^2}{2x}\right) + x - \frac{2x}{4 - x^2} &= 0 \\ (4 - x^2)^2 + x^2(4 - x^2) - 2x^2 &= 0 \\ 3x^2 - 8 &= 0 \\ x &= \frac{2\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

Se eligió solamente la raiz positiva pues $x > 0$ en A. Por lo tanto, el único punto crítico es $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ (0.5) encontrar los puntos crticos, (0.5) discrimianr los puntos en el dominio , que es mínimo local pues es punto crítico de una función convexa. Para probar que f es estrictamente convexa:

Solución: Para facilitar el análisis escribimos f de la siguiente manera:

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 + xy - 2\ln(x) - \ln(y).$$

Para $x, y > 0$ la función es diferenciable, pues es la suma de funciones diferenciables. Se obtienen derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{2} + y - \frac{2}{x},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x - \frac{1}{y},$$

y las derivadas parciales de segundo orden $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{2} + \frac{2}{x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 + \frac{1}{y^2}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 1$.

Como cada derivada parcial de segundo orden define una función continua en A, entonces f es de clase $\mathcal{C}^2$.

Para analizar la convexidad de f, consideramos la matriz hessiana:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{2}{x^2} & 1 \\ 1 & 2 + \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

Como $\frac{1}{2} + \frac{2}{x^2} > 0$ y $\det(H(x,y)) = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{x^2}\right)\left(2 + \frac{1}{y^2}\right) - 1 > \frac{1}{2} \cdot 2 - 1 = 0$, sigue que $H(x,y)$ es definida positiva para todo $(x,y) \in A$. Por lo tanto f es estrictamente convexa en todo su dominio A. (1.0) argumentar el caracter de mínimo, ya sea por convexidad o demostrando que la matriz Hessiana es definida positiva en el punto crítico.

(b) (3.0 pts) Muestre que f alcanza su mínimo global en un único elemento de A, y no alcanza su máximo. Para esto se sugiere lo siguiente:

- Considere $(a,b) \in Fr(A)$, y muestre que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = +\infty$.
- Luego verifique que $\lim_{||(x,y)||\to+\infty} f(x,y) = +\infty$

INDICACIÓN: Para esto último puede usar el hecho de que $x - lnx \to +\infty$, cuando $x \to +\infty$.

Solución: Una manera de probar que el punto mínimo local que se encontró en la parte anterior es el que minimiza la función f en todo A es la siguiente: como f es estrictamente convexa en todo su dominio, entonces su gráfico se encuentra sobre el plano tangente en cualquier punto, es decir:

$$f(x) > f(y) + df(y)(x-y),\ \forall x \neq y \text{ en } A.$$

Tomando $y = \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, qeda que $df(y) = [0\ 0]$, ya que es punto crítico, y

$$f(x,y) > f\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right),\ \forall (x,y) \neq \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right) \text{ en } A.$$

Lo que prueba la minimalidad global.(1.5) probarlo vía plano tangente o demostrando que es estrictamente convexa y enunciando el resultado para funciones estrictamente convexas

Para probar que f no alcanza su máximo en su dominio basta chequear solamente uno de los límites sugeridos. Corregir solo una de las opciones

- Si $(a,b) \in Fr(A)$, entonces $a = 0$ ó $b = 0$ (0.5). Por lo tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) > \lim_{(x,y)\to(a,b)} -2\ln(x) - \ln(y) = +\infty.$$ (1.0) punto

- Si $||(x,y)|| \to +\infty$, entonces $x \to +\infty$ ó $y \to +\infty$ (0.5) luego $f(x,y) > \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2\ln(x) + y^2 - \ln(y)$. Si $x \to +\infty$ entonces $\left(\frac{x}{2}\right)^2 > 2x$, en caso contrario si $y \to +\infty$, entonces $y^2 > y$, en cualquier caso, de la indicación, $\lim_{(x,y)\to(+\infty} f(x,y) = +\infty$.(1.0)

(2) (a) (3.0 pts) Considere la lámina plana $D = \{(x,y)|\ x^2+y^2 \leq a^2, y \geq 0\}$. Hallar la masa de esta lámina y su centro de masa, sabiendo que la densidad de masa varía proporcionalmente a la distancia al centro del lado recto de la lámina.

Solución: La masa está dada por:

$$M = \int_0^\pi \int_0^a r^2 dr d\theta = \int_0^\pi \frac{a^3}{3} d\theta = \frac{Ka^3\pi}{3}.(1.0)$$

Veamos las coordenadas del centro de masas:

$$\bar{x} = \frac{3}{a^3\pi}\int_0^\pi \int_0^a r\cos\theta r^2 dr d\theta = \frac{3}{a^3\pi}\int_0^\pi \frac{a^4}{4}\cos\theta d\theta = 0\ (1.0)$$
$$\bar{y} = \frac{3}{a^3\pi}\int_0^\pi \int_0^a r^3 \sin\theta dr d\theta = \frac{3a}{4\pi} \in_0^\pi \sin\theta = \frac{3a}{2\pi}.\ (1.0)$$

(b) (3.0 pts) Considere para una función $T(x,y)$ la siguiente ecuación diferencial:

$$\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right](x,y) = \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Se pide encontrar una solución $T(x,y)$ tal que

$$\lim_{\|(x,y)\|\to+\infty} T(x,y) = 0.$$

Para esto. primero use el cambio de variables $h(r,\theta) = T(r\cos\theta, r\sin\theta)$ (polares) y luego. en la ecuación resultante, busque una solución donde h sólo dependa de r, es decir, $h(r,\theta) = g(r)$.

Solución: Aplicando el cambio de variables, calculemos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial T}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r},$$

luego encontramos que:

$$\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial T}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + \frac{\partial T}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta.$$

Con un argumento similiar se obtiene que:

$$\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta) = -\frac{\partial T}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)r\sin\theta + \frac{\partial T}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)r\cos\theta.$$

Podemos despejar para obtener:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial h}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial h}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}$$
$$\frac{\partial T}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial h}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial h}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}$$

(1.0) Aplicar correctamente la regla de la cadena

Notemos que T satisface la ecuación del enunciado si, y sólo si:

$$\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2\right](x,y) = \frac{1}{(1+r^2)^2}$$

para todo $(r,\theta) \in [0,\infty) \times [0, 2\pi)$. Sustituyendo:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)^2 (r,\theta) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial h}{\partial \theta}\right)^2 (r,\theta) = \frac{1}{(1+r^2)^2}.$$

(1.0) obtener la eciación en su forma polar

Esta expresión sugiere que el modo más simple de encontrar una solución es buscar h independiente de θ, $h(r,\theta) = g(r)$. Sustituyendo arriba, obtenemos la siguiente EDO para g.

$$g'(r)^2 = \frac{1}{(1+r^2)^2}, \ \forall r \in [0,\infty).$$

Así, encontraremos una solución de la ecuación si resolvemos

$$g'(r) = \frac{1}{1+r^2}.$$

(0.5) deducir la ecuacin independiente de θ

Con lo que obtenemos

$$g(r) = \arctan(r) + C$$

En términos de la función original:

$$T(x,y) = \arctan(\sqrt{x^2+y^2}) + C.$$

La condición de anulamiento en ∞ nos fuerza a escoger $C = -\frac{\pi}{2}$.

(0.5) concluír

(3) (a) (3pts) Calcule el área de la superficie determinada por $z = xy + 3$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Solución: Utilizando coordenadas polares en el plano XY, tenemos que $x = \rho\cos(\theta)$, $y = \rho\sin(\theta)$ de donde las ecuaciones de la superficie se escriben como: $z = \rho^2\sin(\theta)\cos(\theta) + 3 = \rho^2\sin(2\theta)/2 + 3$ y $\rho = 1$. Podemos entonces usar la parametrización

$$\sigma(\rho,\theta) = \left(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), \frac{\rho^2\sin(2\theta)}{2} + 3\right) \qquad \rho \in [0,1],\ \theta \in [0,2\pi]$$

(1.0) parametrización

Sabemos que la integral de superficie es:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left\|\frac{\partial\sigma(\rho,\theta)}{\partial\rho} \times \frac{\partial\sigma(\rho,\theta)}{\partial\theta}\right\| d\rho\, d\theta \qquad (0.5)$$

$-\cos(\pi) + \cos(0)$

$$\frac{\partial\sigma(\rho,\theta)}{\partial\rho} = (\cos(\theta), \sin(\theta), \rho\sin(2\theta)) \quad (0.25)$$
$$\frac{\partial\sigma(\rho,\theta)}{\partial\theta} = (-\rho\sin(\theta), \rho\cos(\theta), \rho^2\cos(2\theta)) \quad (0.25)$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma(\rho,\theta)}{\partial\rho} \times \frac{\partial\sigma(\rho,\theta)}{\partial\theta} =&[\rho^2\cos(2\theta)\sin(\theta) - \rho^2\sin(2\theta)\cos(\theta)]\,\hat{\imath}\\ &+[-\rho^2\cos(2\theta)\cos(\theta) - \rho^2\sin(2\theta)\sin(\theta)]\,\hat{\jmath}\\ &+\rho\,\hat{k}\end{aligned}$$

luego

$$\left\|\frac{\partial\sigma(\rho.\theta)}{\partial\rho} \times \frac{\partial\sigma(\rho,\theta)}{\partial\theta}\right\| = \sqrt{\rho^2+\rho^4} = \rho\sqrt{1+\rho^2} \quad (0.5)$$

de donde

$$\begin{aligned}\text{Area} &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\sqrt{1+\rho^2}d\rho\, d\theta\\ &= 2\pi\frac{1}{3}(1+\rho^2)^{3/2}\Big|_0^1\\ &= \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1) \quad (0.5)\end{aligned}$$

---

(3) (a') Hallar el volumen del sólido limitado por los cilindros $x^2+y^2=a^2$ y $x^2+z^2=a^2$.

Solución: El sólido cumple que $x^2+y^2 \le a^2$ y $x^2+z^2 \le a^2$. Mirando ambas desigualdades se tiene que $-a \le x \le a$, de la primera, dado x fijo se tiene que $-\sqrt{a^2-x^2} \le y \le \sqrt{a^2-x^2}$ y de la segunda se deduce que $-\sqrt{a^2-x^2} \le z \le \sqrt{a^2-x^2}$.(1.0) límites de integración
Por lo que:

Solución: El sólido cumple que $x^2+y^2 \le a^2$ y $x^2+z^2 \le a^2$. Mirando ambas desigualdades se tiene que $-a \le x \le a$, de la primera, dado x fijo se tiene que $-\sqrt{a^2-x^2} \le y \le \sqrt{a^2-x^2}$ y de la segunda se deduce que $-\sqrt{a^2-x^2} \le z \le \sqrt{a^2-x^2}$ por lo que:

$$\begin{aligned}V &= \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dzdydx \quad (1.0)\\ &= \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} 2\sqrt{a^2-x^2}dydx\\ &= 2\int_{-a}^{a}(2a^2-2x^2)dx\\ &= 4a^2\int_{-a}^{a}dx - 4\int_{-a}^{a}x^2dx\\ &= 8a^3 - \frac{8a^3}{3} = \frac{16a^3}{3}. \quad (1.0)\end{aligned}$$

(b) (3pts) Usando el cambio de variables lineal: $u = \frac{2x-y}{2}$, $v = \frac{y}{2}$, $w = \frac{z}{3}$, calcule

$$\int_0^3 \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}+1} \left(\frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3}\right) dxdydz$$

Solución: Calculando el Jacobiano de la transformación:

$$det(J(T)) = det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \quad (0.5)$$

Pero como la transformación va de los puntos (x, y, z) a (u, v, z), necesitamos que $|J(T)|^{-1} = 6$.

La región de integración queda determinada por (1)$0 \leq z \leq 3$, (2)$0 \leq y \leq 4$, (3)$\frac{y}{2} \leq x \leq \frac{y}{2} + 1$. Dividiendo (1) por 3 tenemos que $0 \leq \frac{z}{3} \leq 1$. Así, $0 \leq w \leq 1$. Dividiendo (2) por 2 se tiene que $0 \leq \frac{y}{2} \leq 2$. Así, $0 \leq v \leq 2$. Como $u = \frac{2x-y}{2}$, entonces $x = u + \frac{y}{2} = u + v$. Reemplazando en (3), se tiene que $v \leq u + v \leq v + 1$; por lo tanto $0 \leq y \leq 1$. (1.0) límites de integración

Entonces:

$$\begin{aligned} \int_0^3 \int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y}{2}+1} \left(\frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3}\right) dxdydz &= 6 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^2 (u+w) dvdw \quad \text{(1.0) aplicación correcta del teorema} \\ &= 12 \int_0^1 \left(u + \frac{1}{2}\right) du \\ &= 12 \int_0^1 udu + 6 \int_0^1 du \\ &= 6 + 6 = 12 \qquad (0.5) \end{aligned}$$