MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Semestre Otoño 2015
Profesor: Mauricio Soto
Auxiliar: Leonel Huerta

Clase Auxiliar 14
14 de Agosto

$\boxed{\text{P1.}}$ La EDP, con sus condiciones iniciales y de borde, que modela las vibraciones de una viga estructural simplemente apoyada es:

$$(P)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+e^2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} &= 0 \quad , \quad \forall x\in(0,L),\ t>0 \\ u(0,t)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) &= 0 \\ u(L,t)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L,t) &= 0 \\ u(x,0) &= f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x) \end{cases}$$

(a) Usando el método de separación de variables en la forma $u(x,t)=\phi(X)\psi(t)$, pruebe que para resolver el problema espacial, deben encontrarse aquellas constantes $\alpha\in\mathbb{R}$ de modo que la EDO siguiente tenga soluciones no triviales:

$$(P_{vp})\begin{cases} \alpha\phi(x)+\phi^{(4)}(x) = 0 \quad , \quad \forall x\in(0,L),\ t>0 \\ \phi(0) = \phi''(0) = 0 \quad \text{(C.B. en } x=0) \\ \phi(L) = \phi''(L) = 0 \quad \text{(C.B. en } x=L) \end{cases}$$

(b) Pruebe que cuando $\alpha=0$, la única solución del problema (P_{vp}) es $\phi\equiv 0$.

(c) Multiplique la EDO del problema (P_{vp}) por $\phi(x)$, integre por partes y utilice las condiciones de borde para probar que toda solución de (P_{vp}) satisface la relación:

$$\alpha\int_0^L \phi^2(x)dx+\int_0^L[\phi''(x)]^2dx=0$$

(d) Use la relación anterior para probar que si $\alpha>0$, entonces la única solución del problema (P_{vp}) es $\phi\equiv 0$.

(e) Según los resultados anteriores, el problema (P_{vp}) tiene soluciones no triviales sólo si $\alpha<0$. Haga el cambio de variable $\alpha=-a^4$, donde $a>0$ y resuelva el problema (P_{vp}).

Hint: Recuerde que la solución general de la EDO en el problema (P_{vp}) es de la forma:

$$\phi(x) = A\cosh(ax) + B\sinh(ax) + C\cos(ax) + D\sin(ax)$$

Use las condiciones de borde en $x = 0$ para encontrar A y C. Luego, utilice las condiciones de borde en $x = L$ para probar que $B = 0$ y $D\sin(aL) = 0$. Use estos resultados para concluir que la solución es no trivial sólo cuando $a = a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, donde debe explicitar los a_n y los ϕ_n correspondientes.

(f) Para cada a_n de la ecuación anterior, resuelva la ecuación temporal y pruebe que la n-ésima solución de la EDP+CB en el problema (P) es de la forma:

$$u_n(x,t) = [A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t)]\sin(a_n x)$$

Donde debe explicitar los valores ω_n en términos de a_n y los datos del problema.

(g) Indique cuál es la solución del problema (P) si las condiciones iniciales son:

$$f(x) = 5\sin(4\pi x/L)\ , \quad g(x) = -7\sin(4\pi x/L)$$

(h) Considere el caso en que $f(x)$ y $g(x)$ se pueden desarrollar en series de Fourier de senos en $[0, L]$. En este caso, escriba la solución formal $u(x,t)$ del problema (P) como una serie, escribiendo las fórmulas que permiten calcular los coeficientes A_n y B_n en términos de las funciones f y g.

(i) Escriba la solución formal del problema (P) en el caso particular en que $f(x) = x(L-x)$ y $g(x) = 0$. Debe calcular todos los coeficientes.