IN7R9 - Teoría de Juegos y Economía de la Información.
Semestre: Primavera 2015
Profesor: Prof. Juan Escobar
Auxiliar: Gian Luca Carniglia

Repaso Teoría de Juegos

Jueves 30 de Julio.

Resumen

Juegos en Forma Normal

- Un juego en **forma normal** $G = \langle I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I}\rangle$ se compone de:
  - Los jugadores $i \in I = \{1, ..., n\}$.
  - Las estrategias $s_i \in S_i$ de cada jugador.
  - Los pagos $u_i(s)$ que reciben los jugadores.
- **Notación:**
  - $S_{-i} = S_1 \times ... \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times ... \times S_n$
  - $s_{-i} = (s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$
- **Def:** Una estrategia $\bar{s}_i$ del jugador i está **estrictamente dominada** por otra estrategia s_i^* si:

$$\forall s_{-i} \in S_{-i} \quad u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(\bar{s}_i, s_{-i})$$

- **Def:** El proceso de eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas **EIEED** consiste en reducir el juego G a un juego G', eliminando una estrategia estrictamente dominada, y luego aplicar sucesivamente el mismo procedimiento hasta obtener un juego G^* sin estrategias estrictamente dominadas. Es decir:

$$G \to G' \to G'' \to ... \to G^*$$

  donde si $G = \langle I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I}\rangle$ y $s_i \in S_i$ está estrictamente dominada, entonces $G' = \langle I, (S_i')_{i\in I}, (u_i')_{i\in I}\rangle$, con $S' = S_i \setminus \{s_i\} \times S_{-i}$ y $u_i' = u_i|_{S'}$

- **Prop:** El resultado del proceso de EIEED no depende del orden en que se eliminen las estrategias.
- **Def:** Decimos que $s^* \in S$ es **solución por EIEED** de G si al aplicar el proceso de eliminación se obtiene G^*, con $S^* = \{s^*\}$; es decir, si luego de aplicar EIEED sobrevive una única estrategia para cada jugador.
- **Def:** Una estrategia s_i^* del jugador i es **mejor respuesta** a las estrategias de los demás jugadores s_{-i} si:

$$\forall s_i \in S_i \quad u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$$

- **Def:** La **función de mejor respuesta** del jugador i se define como la aplicación $BR_i : S_{-i} \rightrightarrows S_i$, que a cada perfil de estrategias de los demás jugadores s_{-i} le asocia la mejor respuesta s_i^* del jugador i; es decir:

$$BR_i(s_{-i}) = \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})$$

- **Def:** Un vector de estrategias $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*)$ constituye un **equilibrio de Nash** si:

$$\forall i \in I \ \forall s_i \in S_i \quad u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

  Equivalentemente, decimos que s^* es un EN si todos los jugadores juegan su mejor respuesta a lo que juegan los demás:

$$s_i^* \in BR_i(s_{-i}^*) \qquad \forall i \in I$$

  De manera aún más sencilla, un perfil de estrategias es EN ssi ningún jugador tiene incentivos al desvío.

- **Prop:** Si $s^* \in S$ es solución por EIEED, entonces es Equilibrio de Nash.
- **Prop:** Todo equilibrio de Nash sobrevive al proceso de EIEED.
- **Def:** Una **estrategia mixta** $\sigma_i : S_i \longrightarrow [0,1]$ es una distribución de probabilidad, que le asigna la probabilidad $\sigma_i(s_i)$ a que el jugador i use su estrategia s_i
- **Def:** El **pago** para el jugador i del perfil de estrategias mixtas σ corresponde a su utilidad esperada bajo la medida de probabilidad que induce σ; es decir:

$$u_i(\sigma) = \mathbb{E}_\sigma[u_i(s)] = \sum_{s\in S} \sigma(s)u_i(s) = \sum_{s\in S} \left(\prod_{j=1}^{n} \sigma_j(s_j) \right) u_i(s)$$

- **Def:** Un equilibrio de Nash en estrategias mixtas **ENEM** es una combinación de estrategias $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_n^*)$ tal que:

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*) \quad \forall i \in I \; \forall \sigma_i$$

- **Prop:** $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_n^*)$ es un equilibrio de Nash ssi:

$$\forall s_i \in S_i \quad \sigma^*(s_i) > 0 \Rightarrow s_i \in \arg \max_{\bar{s}_i \in S_i} u_i(\bar{s}_i, \sigma_{-i}^*)$$

  En un equilibrio de Nash en estrategias mixtas, todos los jugadores ponen peso positivo **sólo a las estrategias que maximizan su utilidad**.

- **Teo:** (Nash) Todo juego con un número finito de jugadores y de estrategias tiene al menos un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

Juegos Bayesianos

- Un **juego en Bayesiano** $G = \langle I, (\Theta_i)_{i\in I}, (S_i)_{i\in I}, (p_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I} \rangle$ se compone de:
  - Los jugadores $i \in I = \{1, ..., n\}$.
  - Θ_i el conjunto de tipos de cada jugador.
  - Las acciones $s_i \in S_i$ de cada jugador.
  - Las creencias $p_i : \Theta_i \to \Delta(\Theta_{-i})$ del jugador i, dependiendo de su tipo θ_i, sobre la distribución de tipos de los demás jugadores.
  - Los pagos $u_i : \Theta \times S \to \mathbb{R}$ que recibe cada jugador, según los tipos y las estrategias que se realizaron.
- **Def:** Una **estrategia Bayesiana** del jugador i es una función que a cada tipo del jugador le asocia una acción:

$$\begin{aligned} \sigma_i : \Theta_i &\longrightarrow S_i \\ \theta_i &\longmapsto \sigma_i(\theta_i) \end{aligned}$$

- **Def:** La **utilidad** del jugador i cuando es de tipo θ_i y se utiliza el perfil de estrategias $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ está dada por el pago esperado:

$$\mathbb{E}u_i(\sigma|\theta_i) = \sum_{\theta_{-i}\in\Theta_{-i}} p_i(\theta_{-i}|\theta_i) u_i(\sigma_i(\theta_i), \sigma_{-i}(\theta_{-i})|\theta_i)$$

- **Def:** Un **Equilibrio Bayesiano** es aquel en el que ningún jugador, de ningún tipo, tiene incentivos al desvío; es decir $\sigma = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ perfil de estrategias Bayesianas tal que:

$$\forall i \in I \; \forall \theta_i \in \Theta_i \qquad \sigma_i(\theta_i) \in \arg\max_{s_i} \; \mathbb{E}u_i(s_i, \sigma_{-i}|\theta_i)$$

- **Prop:** La racionalidad de los jugadores impone que éstos actualicen sus creencias utilizando la **regla de Bayes**:
$$p_i(A|B) = \frac{p_i(B|A)p_i(A)}{p_i(B)}$$

- **Def:** Las estrategias **cut-off** consisten en planes de acción de la forma:
$$s_i(\theta_i) = \begin{cases} s_1 & \text{si } \theta_i \geq \bar{\theta} \\ s_2 & \text{si } \theta_i \leq \bar{\theta} \end{cases}$$
Se utilizan generalmente en juegos del tipo "provisión de un bien público". La resolución del problema se reduce a determinar cuál es el $\bar{\theta}$ que hace que jugar estas estrategias constituya un equilibrio bayesiano, imponiendo que el jugador de tipo $\bar{\theta}$ este indiferente entre s_1 y s_2.

Juegos Dinámicos

- Un **Juego en Forma Extensiva:** $G = \langle I, H, P, (u_i)_{i\in I}\rangle$ se compone de:
  - Los jugadores $i \in I = \{1, ..., n\}$.
  - El conjunto de historias H que satisface:
    - Existe la historia inicial $\emptyset \in H$.
    - Si $(a_k)_{k=1}^K \in H$ y $L < K$, entonces $(a_k)_{k=1}^L \in H$.
    - Si $(a_k)_{k=1}^\infty$ es tal que $(a_k)_{k=1}^K \in H$ para todo $K \in \mathbb{N}$, entonces $(a_k)_{k=1}^\infty \in H$.
  - La función de jugadores $P : H \setminus Z \to I$ que especifica quién juega ante cada eventualidad.
    Donde Z corresponde al conjunto de historias terminales.
    $Z = \{(a_k)_{k=1}^K \in H \mid K = \infty \ \vee \ \nexists\, a_{K+1} : (a_k)_{k=1}^{K+1} \in H\}$.
  - Los pagos $u_i : Z \to \mathbb{R}$ que recibe cada jugador una vez que haya transcurrido el juego.

- **Def:** El conjunto de **acciones** en $h \in H$ corresponde a las posibles historias que le podrían continuar; esto es, el jugador $P(h)$ debe escober una acción en $A(h) = \{a \mid (h, a) \in H\}$.

- **Def:** Una **estrategia** es un plan de acción completo y contingente a cada eventualidad. Es decir, es una función
$$\sigma_i : \{h \in H \setminus Z \mid P(h) = i\} \longrightarrow \bigcup_{P(h)=i} A(h)$$

- **Def:** Un **sub-juego:** es un juego que deriva de un único set de información, y contiene todos los nodos que derivan de él. Gráficamente corresponde a todos los juegos que parten de un nodo simple.

- **Def:** Un equilibrio de Nash es **perfecto en sub-juegos (EPS)** si las estrategias de los jugadores constituyen un equilibrio de Nash en cada sub-juego.

Ejercicios

Juegos en Forma Normal

P1. Considere el siguiente juego en forma Normal

	M	N	P	R
A	1,-2	-2,1	2,-1	0,0
B	-2,1	1,-2	2,-2	0,0
C	-1,3	-3,2	3,0	-1,1
D	0,0	0,0	2,0	1,1

Mostraremos que sólo existe un equilibrio de Nash.

(a) Utilice la Eliminación Iterada de Estrategias Estrictamente Dominadas y encuentre el único Equilibrio de Nash en estrategias puras del problema.

(b) Muestre que no es posible asignar un peso positivo a las Estrategias A y B al mismo tiempo.

(c) Muestre que no es posible asignar:

i.- $\sigma_1(A) > 0$, $\sigma_1(D) > 0$ y $\sigma_1(B) = 0$

ii.- $\sigma_1(B) > 0$, $\sigma_1(D) > 0$ y $\sigma_1(A) = 0$

(d) Concluya que no existen otros EN es estrategias mixtas.

P2. Considere un juego entre n agentes que deben decidir si contribuir o no a la provisión de un bien público. Si el agente i contribuye, entonces incurrirá en un costo $c \in (0,1)$. Para que el bien público se provea se requiere que al menos un agente contribuya. Si el bien público se provee, todos disfrutan de una utilidad igual a 1.

(a) Muestre que existen n equilibrios de Nash en estrategias puras.

(b) Encuentre el equilibrio de Nash en estrategias mixtas. ¿Cómo cambia el equilibrio cuando c crece? ¿Y cuando n crece? Explique la intuición económica.

P3. Este es un modelo de competencia de Bertrand con consumidores leales/distrados/etc. Dos firmas $i = 1, 2$ producen un bien homogéneo a un costo por unidad constante igual a $c > 0$. Hay $M = N + 2K$ consumidores, cada uno de los cuales compra 1 unidad o nada. Cada consumidor tiene un valor de reserva igual a $v > c$ y si esta indiferente entre comprar o no comprar ($v = p$) siempre compra. N consumidores compran de la firma con el menor precio (resuelven indiferencias uniformemente). K consumidores son leales a una firma; ellos compran a la firma a la que son leales siempre, a menos que el precio de la firma sea mayor que v. Asuma que $N, K > 0$.

(a) Muestre que el juego no tiene EN.

(b) Encuentre un ENEM simétrico en que las firmas escogen precios de acuerdo a una distribución F continua con soporte en $[a, v]$, donde $a \in (c, v)$ debe ser determinado.

(c) Discuta las propiedades del equilibrio cuando $\frac{K}{N} \to 0$ y cuando $\frac{K}{N} \to 1$.

Juegos Bayesianos

P4. Usted sabe que su rival tiene en su bolsillo un monto de dinero entre 0 y mil pesos, pero sólo su rival conoce el monto exacto. Sus estimaciones le indican que todos los montos en el conjunto $\{0, 1, ..., 1000\}$ tienen probabilidad positiva, pero los montos altos parecen mucho más probables. Su rival cree que usted tiene en su bolsillo un monto de dinero entre 0 y mil pesos, pero usted sabe que en su propio bolsilo sólo hay 100 pesos. Su rival le ofrece intercambiar los montos, de modo que si usted acepta perderá los 100 pesos y se quedará con el monto de dinero que su rival tiene en su bolsillo.

(a) Un muy buen amigo le sugiere que acepte, pues la cantidad que su rival tiene en su bolsilo es muy probablemente alta y usted solo tiene 100 pesos. Seguirá el consejo de su amigo? Explique.

(b) Modele la situación descrita como un juego Bayesiano y encuentre un EB simétrico del juego.

P5. Dos firmas deciden simultáneamente si entrar o no a un mercado. El costo de entrada de la firma i es $\theta_i \in [0, \infty)$. Los costos de las firmas son información privada y son independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución acumulada F (densidad $f > 0$). Los pagos para la firma i son $\Pi^m - \theta_i$ si es la única en entrar, $\Pi^d - \theta_i$ si ambas entran, y 0 si no entra. Los valores Π^m y Π^d son las utilidades de monopolio y duopolio respectivamente y son de dominio público, con $\Pi^m > \Pi^d > 0$. Encuentre un equilibrio bayesiano simétrico y demuestre su unicidad.

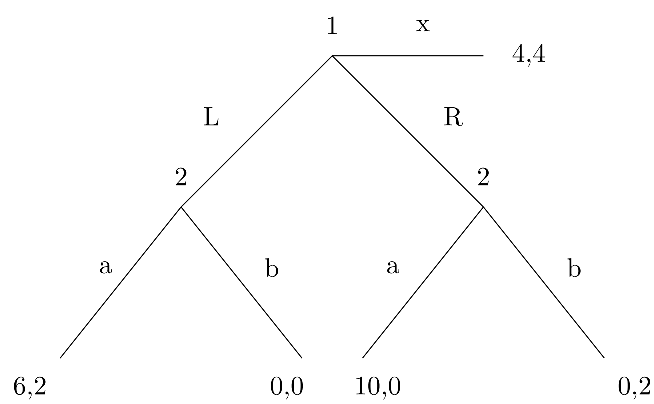
P6. Hay un grupo de n amigos que quiere juntarse a estudiar Microeconomía Avanzada, el problema es que la sala que pidieron no tiene plumones y ya es muy tarde para ponerse de acuerdo en quién lleva el plumón. Cada amigo i puede llevar el plumón (L), lo que tiene un costo c_i, o no llevarlo (NL). Si al menos una persona lleva plumón, entonces todos reciben utilidad 1, si nadie lo lleva, todos reciben 0. Nadie conoce los costos de los demás, pero todos saben que $c_i \sim U(\underline{c}, \bar{c})$, donde $\underline{c} < 1 < \bar{c}$.

(a) Suponga que $n = 2$. Encuentre el equilibrio Bayesiano.

(b) Encuentre el equilibrio bayesiano para un n arbitrario.

Juegos Dinámicos

P7. Considere el juego en forma extensiva que se muestra en la figura a continuación.



(a) Encuentre la forma normal del juego.

(b) Encuentre todos los EN del juego.

(c) Encuentre todos los EPS. Encuentre todas las soluciones de inducción reversa.

P8. Considere el siguiente juego de negociación: dos agentes deben repartirse una torta de tamaño 1m haciendo ofertas alternadas. En $t = 1$ el agente 1 hace una oferta $x_1 \in [0, 1]$ al jugador 2, quien la acepta o rechaza. Si la acepta, el jugador 2 recibe $1 - x_1$, dejando x_1 para el jugador 1. Si la rechaza, no hay división de la torta, y es su turno de hacer una oferta $x_2 \in [0, 1]$ en $t = 2$. Si su oferta es aceptada, recibe x_2, mientras que 1 recibe $1 - x_2$. Si es rechazada, el jugador 1 es quien debe hacer el ofrecimiento en $t = 3$, y así sucesivamente. Suponga un factor de descuento común $\delta \in (0, 1)$ y que hay T periodos de negociación (asuma que T es par). Suponga además que ante indiferencias entre aceptar o rechazar, los agentes prefieren aceptar. Encuentre el equilibrio perfecto en subjuegos, es decir, encuentre una secuencia $(x_1, ..., x_T)$. Determine $\lim_{T\to\infty} x_1$.

P9. Considere un juego de Stackelberg entre dos firmas, 1 y 2. La firma 1 decide $q_1 \geq 0$ primero, y luego la firma 2, observando q_1, decide q_2. La demanda inversa esta dada por $P(q_1 + q_2) = \text{máx}\{a - (q_1 + q_2), 0\}$ con $a > 0$. Las firmas no tienen costos.

(a) Muestre que el juego tiene un continuo de EN.

(b) Encuentre el EPS.

(c) Muestre que en este juego el que mueve primero siempre está mejor que en la solución de Cournot.