IN7R9 Teoría de Juegos y Economía de la Informacín | Profesor: Juan Escobar
Primavera 2015 | Auxiliares: Gian Luca Carniglia

Tarea 4

Entrega: Al comenzar el Examen

1. Considere un modelo de agente-principal en el que el agente realiza un esfuerzo $a \geq 0$ a un costo $c(a)$, con $c', c'' > 0$. El esfuerzo no es verificable, pero si los son las ventas que realiza el agente $q = a + \epsilon$, donde ϵ sigue una normal $N(0, \sigma^2)$. El principal es neutro al riesgo y su utilidad es $q - w$, mientras que el agente tiene utilidad $-e^{-(w-c(a))}$. Nos restringimos a contratos lineales $w(q) = \beta + \alpha q$.

   a. Plantee el problema de diseño óptimo de contrato del principal.

   b. Muestre que en el óptimo (a^*, α^*, β^*) se tiene que $\alpha^* = \frac{1}{1+c''(a^*)\sigma^2}$.

   En lo que sigue, suponemos que el agente puede observar una señal y que no es productiva, pero sí estaá correlacionada con el ruido ϵ (por ejemplo, las ventas en la tienda vecina). Suponemos que (ϵ, y) siguen una normal con media 0 y matriz de varianza-covarianza Σ. Nos restringimos a contratos lineales $w(q, y) = \beta + \alpha(q + \gamma y)$

   c. Encuentre γ^* usado en el contrato óptimo. Explique intuitivamente su resultado.

2. Un agente tiene una riqueza inicial W_0 y puede tener un accidente que cause una pérdidad x. Suponemos que x es verificable. Una compañia aseguradora (neutral al riesgo) le ofrece un seguro que paga $R(x)$ en caso de pérdida. La pérdida depende del cuidado a que el agente tenga. La distribución de $x \geq 0$, $F(x \mid a)$, está dadá por

$$F(0 \mid a) = 1 - p(a)$$

   mientras que para $x > 0$ $F(x \mid a) = p(a)G(x)$ donde G es diferenciable y creciente con densidad $g > 0$ y $p(a) \in$ es decreciente y convexa. La función de utilidad del agente está dada por $u(W_0 - x + R(x)) - c(a)$, donde c es el costo del cuidado, con $u' >'$, $u'' < 0$, $c' > 0$ y $c'' > 0$. Suponemos que el agente tiene todo el poder de negociación pero la aseguradora siempre puede negarse a tomar el contrato que el agente propone

   a. Caracterice el cuidado óptimo del agente cuando no hay seguro.

   b. Caracterice el seguro óptimo cuando a es verificable. Es decir, resuelva

$$\max_{w(),a} p(a) \int u(W_0 - x + R(x))g(x)dx + (1 - p(a)) \int u(W_0 + R(0)) - c(a)$$

   sujeto a la restricción de participación de la asegurardora:

$$p(a) \int R(x)g(x)dx + (1 - p(a))R(0) \leq 0$$

   c. Suponga ahora que el cuidado no es contratable. Plantee el problema de diseño de contrato óptimo suponiendo que el enfoque de primer order (first order approach) es válido.

d. Muestre que el contrato óptimo en la parte c es una prima y un deducible (que es independiente del tamaño de la pérdida). Explique.

3. En muchas organizaciones, malos resultados son seguidos de dineros gastados fuera de la organización (o "money burning"). Por ejemplo, en ligas deportivas profesionales, cuando un jugador es evaluado negativamente en su desempeño, su club no paga el bono al jugador si no que a una institución de caridad (que es independiente del club).

   a. Explique por qué esto no es consistente con la teoría de agente-principal vista en clases.

   En lo que sigue, expandimos la teoría para hacer sentido de esta evidencia suponiendo que las evaluaciones que hace el principal son subjetivas. Un agente y un principal deciden de acuerdo a la siguiente secuencia de eventos:

   - El agente decide una acción $a \in \{H, L\}$
   - El principal observa privadamente el producto $q \in [\underline{q}, \bar{q}]$, que se realiza de acuerdo a $f(q \mid a)$. Suponemos que
   $$\frac{f(q \mid H)}{f(q \mid L)}$$
   es estrictamente creciente en q.
   - El principal reporta $\tilde{q}$, paga $t(\tilde{q})$ y el agente recibe $w(\tilde{q})$, donde $w(\cdot) \leq t(\cdot)$. La diferencia, $t(\tilde{q}) - w(\tilde{q})$ es enviada a una institución de caridad (money burnt).

   Suponemos que los pagos $(t(\cdot), w(\cdot))$ son contratables, pero la acción a no lo es. Notar además que el contrato se ejecuta como función del reporte $\tilde{q}$ del principal (que puede tener incentivos a mentir), de modo que una restricción del problema es la de incentivos del principal: para todo q, el principal debe preferir reportar q por sobre reportar $\tilde{q} \neq q$.

   Los pagos del principal son $q - t$, mientras que los del agente son $u(w) - c(a)$, con $u' > 0$, $u'' < 0$ y $c(H) > c(L) = 0$. El agente no tiene opción externa (no hay restricción de participación), pero está sujeto a responsabilidad limitada (limited liability) de modo que cualquier contrato factible debe satisfacer $w(q) \geq 0$ para todo q.

   b. Caracterice el contrato óptimo si el principal quiera implementar bajo esfuerzo $a = L$.

   En lo que sigue nos interesa el contrato $(\bar{t}, \bar{w})$ que implementa $a = H$ óptimamente.

   c. Plantee el problema de contrato óptimo del principal.

   d. Use la restricción de incentivos del principal para deducir la exisencia de t^* tal que para todo q, $\bar{t}(q) = t^*$.

   e. Muestre que el contrato óptimo es de la siguiente forma: Si el agente produce $q \leq q^*$, el agente no recibe pago y el principal dona t^* a caridad; si la producción es $q > q^*$, el agente recibe t^* y el principal no dona. Caracterice q^* y t^*. [HINT: Escriba el lagrangeano]

4. (Opcional) Un potencial comprador de una casa (principal) contrata a aun agente para que obtenga información sobre la casa. La calidad de la casa es $q \in \{H, L\}$ con $H > L$. Una casa de alta calidad da utilidad 1 al principal, mientras que una de baja calidad da utilidad -1 (esta utilidad es neta del precio pagado). La distribución a priori es $\mathbb{P}[q = H] = \gamma$. Tanto el agente como el principal tienen utilidad quasi-lineal.

El agente invierte e en esfuerzo a un costo $c(e)$ para observar una señal $s \in \{G, B\}$. La señal es informativa con probabilidad

$$\mathbb{P}[s = G \mid q = H] = \mathbb{P}[s = B \mid q = L] = \frac{1}{2} + e.$$

La señal es información dura, de modo que el agente no puede mentir sobre la señal. La función de cotos $c(e)$ es creciente y convexa con $c'''(e) > 0$. Para que los óptimos sean interiores suponga $c'(0) = 0$, $c''(0) = 0$ y $\lim_{e \to 1/2} c(e) = \infty$.

Después de observar la señal, el principal puede escoger comprar o no comprar la casa.Si su decisión es independiente de la señal, entonces no hay razón para que el agente haga esfuerzo. Suponemos entonces que el principal compra si $s = G$ y no compra si $s = B$.

a. Suponga que el esfuerzo es verificable. Muestre que el esfuerzo que maximiza la suma de las utilidades satisface $1 = c'(e)$.

   En lo que sigue, consideramos el caso en que e no es verificable. Un contrato consiste de salarios $w_G \geq 0$ cuando $s = G$ y $w_B \geq 0$ cuando $s = B$. Note que no hay restricción de participación, solo restricción de responsabilidad limitada.

b. Escriba la utilidad del agente y muestre que el esfuerzo del agente satisface

$$(w_G - w_B)(2\gamma - 1) = c'(e).$$

   Qué se puede decir sobre cómo el esfuerzo cambia con γ? Es siempre posible motivar esfuerzo positivo? Explique.

c. Suponga $\gamma > 1/2$. Usando la aproximación de primer orden (first order approach), muestre que el esfuerzo óptimo es

$$1 = c''(e)\Big(e + \frac{1}{2(2\gamma - 1)}\Big) + c'(e).$$

   Muestre que el esfuerzo es creciente en $\gamma > 1/2$. Explique.