MA2002-5 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Rodrigo Lecaros L.
Auxiliares: Diego Marchant D., Manuel Suil J..
Fecha: 2 de Octubre 2015
-

Auxiliar 3

P1. **(a)** Considere el campo vectorial:

$$\vec{H}(x,y,z) = [3x^2y - 3z + e^x \sin z]\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} + [e^x \cos z - 3x]\hat{k}.$$

i. Calcule $rot\vec{H}$.

ii. Determine el valor de

$$\oint_\Gamma \vec{H} \cdot d\vec{r}$$

Donde Γ es la curva parametrizada por

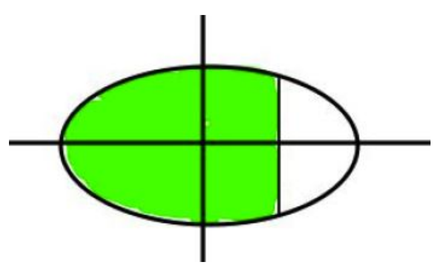
$$\Gamma : \vec{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, -\sin t), t \in [0, 2\pi]$$

(b) Calcule la integral de línea $I = \displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ donde $\vec{F}$ es el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (x^2 - 3y^2, z^2 + y, x + 2z^2)$ y C es la curva que se obtiene como intersección del plano $x - 2y + z = 5$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ recorrida en sentido antihorario.

(c) Sea γ una curva simple suave por tramos, cerrada en $\mathbb{R}^2$ y sea D la región interior a γ.

i. Demuestre que el área de D es igual a: $\displaystyle\int_\gamma y dx + 2x dy$.

ii. Usando la expresión anterior, calcule el área de la región interior al elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ y limitada al costado derecho por la recta x=1, tal como muestra la figura:



Teorema 1. . ***Teorema de Stokes.*** *Sean* $S \subseteq \mathbb{R}^3$ *una superficie orientable y regular a pedazos, cuyo borde* ∂S *es una curva cerrada, simple y regular por pedazos.* $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *un campo vectorial de clase* C^1 *definido sobre un abierto* $U \supseteq S \cup \partial S$*. Sea, además,* $\hat{n} : S \to \mathbb{R}^3$ *un campo de vectores normales que define una orientación sobre* S*, de tal manera que* ∂S *sigue la regla de la mano derecha con respecto a* $\hat{n}$*. Entonces se cumple:*

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot\vec{F} \cdot \hat{n} dA$$

Teorema 2. . ***Teorema de Green.*** *Sean* $S \subseteq \mathbb{R}^2$ *una región acotada, cuya frontera* ∂S *es una curva simple, cerrada y regular por pedazos, orientada en sentido antihorario. Consideremos dos campos escalares* $M = M(x, y)$ *y* $N = N(x, y)$*, ambos de clase* $C^1 enunabiertoquecontienea$ S *y* ∂S*. Entonces:*

$$\oint_{\partial S} M dx + N dy = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy.$$