MA2002-5 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Rodrigo Lecaros L.
Auxiliares: Diego Marchant D., Manuel Suil J..
Fecha: 26 de Noviembre de 2015

Auxiliar 8

Recuerdo

Serie de Fourier.

Sea $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ una función continua por trozos, se dice que f admite desarrollo en serie de Fourier, si existen $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ constantes tales que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right],$$

con los coeficientes calculados de la siguiente forma

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)d\xi, \quad b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{L}\right)d\xi.$$

Convergencia Serie de Fourier.

Dada f una función integrable en $[-L, L]$, se define $S_f(x) = \lim_{N\to\infty} S_f^N(x)$, donde el límite exista con $S_f^N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$, donde a_n, b_n se calculan como antes.

Teorema 1. ***Convergencia*** S_f**.** *Si $f(x)$ es una función continua por trozos en $[-L, L]$ y con derivada por la izquierda y por la derecha en todo punto de $(-L, L)$, con derivada por la izquierda en $x = L$ y por la derecha en $x = -L$, entonces $S_f(x)$ es convergente para cada $x \in [-L, L]$. Donde*

$$S_f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}[f(L) + f(-L)] & \text{si } x = \pm L \\ f(x) & \text{si } x \in (-L, L) \text{ es punto de continuidad} \\ \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] & \text{si } x \in (-L, L) \text{ es punto de discontinuidad} \end{cases}$$

Más en particular se tiene lo siguiente:

Proposición 1. *Si f es derivable en $[-L, L]$ y $f(L) = f(-L)$, entonces $f = S_f$ en $[-L, L]$. Si además f' es de cuadrado integrable, la convergencia de S_f^N hacia f es uniforme.*

Corolario 1. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es $2L$-periódica de clase C^1, entonces $f = S_f$ en $\mathbb{R}$ y S_f^N converge uniformemente hacia f.*

Problemas

1. Encuentre la serie de Fourier en senos de la función f dada en $[0, \pi]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 2 & \text{si } \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$$

   Discuta la convergencia puntual de dicha serie en relación al valor de $f(x)$ para cada $x \in [0, \pi]$.
   Indicación: Puede serle útil extender apropiadamente $f(x)$ para $-\pi \leq x < 0$.

2. Dado $f(x) = cos(x)$ para $x \in [0, \pi]$:

   a) Determine su serie de senos. ¿Por qué es eso posible?
   Indicación: Puede serle útil: $cos(x)sen(nx) = \frac{sen((n+1)x)+sen((n-1)x)}{2}$

   b) Use la parte anterior para probar que $\frac{\sqrt{2}\pi}{16} = \frac{1}{2^2-1} - \frac{3}{6^2-1} + \frac{5}{10^2-1} - \frac{7}{14^2-1} + ...$