MA2002-05 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Rodrigo Lecaros L.
Auxiliar: Diego Marchant D.- Manuel Suil J.

Auxiliar 11

7 de Diciembre de 2015

1. Sea f una función 2π-periódica e integrable, es decir, para todo x se tiene que

$$f(x+2\pi)=f(x)$$

   a) Demuestre que para todo $a,b\in\mathbb{R}$ se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{2\pi+a}^{2\pi+b} f(x)dx$$

   y

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)dx=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)dx$$

   b) Sea $\hat{f}(n)$ el n-ésimo coeficiente de Fourier de f dado por

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}d\theta$$

   Demuestre que la serie de Fourier se puede escribir como

$$f(\theta)\sim\hat{f}(0)+\sum_{n\geq 1}[\hat{f}(n)+\hat{f}(-n)]cos(n\theta)+i[\hat{f}(n)-\hat{f}(-n)]sen(n\theta)$$

   c) Deduzca que si f es par entonces $\hat{f}(n)=\hat{f}(-n)$ y la serie de Fourier es la serie de cosenos ¿Qué pasa cuando f es impar?.

   d) Calcule la serie de $f(x)=|x|$ para $x\in[-\pi,\pi]$.

   e) Demuestre que

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

2. Resuelva a través del método de separación de variables la Ecuación de Schrödinger simplificada con condiciones de borde e iniciales:

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) & \forall t>0,\forall x\in(0,\pi)\\ u(x,0)=f(x) & \forall x\in(0,\pi)\\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 & \forall t>0\end{cases}$$