P2 CS

(a) Para determinar la serie de senos de $f(x) = \cos(x)$ en $[0\ \pi]$, dos argumentos clásicos

1pto Argumentar porqué $f(x)$ tiene serie de senos

- Indicar que la familia $\{ \operatorname{sen}(kx) \mid k \in \mathbb{N}^+ \}$ es un sistema ortogonal completo.

  Así que $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sen}(kx)$ con los c_k a determinar

- Otra forma, es considerar $\tilde{f}(x)$ la extensión impar de $f(x)$ a $[-\pi, \pi]$ y considerar la serie de Fourier de $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$

  Como $\tilde{f}$ es impar, los $a_n = 0$.

1pto Determinar la correcta expresión de los coeficientes

En el 1er caso, se puede obtener a partir de (la expresión se puede suponer conocida)

$(f, g) \equiv \int_0^{\pi} f(x) g(x)\, dx$ el producto interno en $L^2[0\ \pi]$

así

$$(f, \operatorname{sen}(kx)) = \left(\sum_{k'} c_{k'} \operatorname{sen}(k'x), \operatorname{sen} kx \right)$$

$$= c_k \underbrace{(\operatorname{sen} kx, \operatorname{sen} kx)}_{= \pi/2}$$ por ortogonalidad

$$\Rightarrow \quad c_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x) \operatorname{sen}(kx)\, dx$$

En el 2° caso, se tiene 2

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\tilde{f}(x)\,\mathrm{sen}(nx)}_{\text{par}}\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx \quad , \text{ misma fórmula}$$

1 pto Cálculo de los c_n o b_n

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{sen}((n+1)x)+\mathrm{sen}((n-1)x)}{2}\,dx$$ Por fórmula entregada

$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right)\Big|_0^{\pi}$$ (si $n\neq 1$)

usar que $\cos(k\pi)=(-1)^k$

0.5 $$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^n}{(n-1)} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right)$$

$$= \frac{1+(-1)^n}{\pi}\cdot\frac{2n}{n^2-1}$$

0.3 $$= \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ \dfrac{4n}{\pi(n^2-1)} & n \text{ par} \end{cases}$$

Y el caso $n=1$

0.2 $$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{sen}\, x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{sen}\, 2x\,dx.$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = 0$$

1pto por forma final

$$f(x) = \sum_{k \text{ par}} \frac{4k}{\pi(k^2-1)} \operatorname{sen}(kx)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{\pi(4n^2-1)} \operatorname{sen}(2nx) \quad \binom{\text{con}}{2n=k}$$

(b) Despejando la serie como

$$\frac{\pi \cos x}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1} \cdot \operatorname{sen}(2nx)$$

se puede obtener la serie solicitada para

$x = \pi/4$ ← 0.5 puntos determinar cual x usar

$$\frac{\pi \cos(\pi/4)}{8} = \frac{\pi\sqrt{2}}{16}, \quad \text{lado izq.}$$

y el lado derecho

$$\sum \frac{n}{4n^2-1} \cdot \operatorname{sen}(n\,\pi/2)$$

importante 0.4 → 1- $\operatorname{sen}(n\pi/2) = 0 \quad \forall n$ par

0.4 → 2- para los $n = 2k+1$ impares,

$\operatorname{sen}((2k+1)\pi/2)$ alterna signos: $(-1)^k$

(4

Por lo anterior

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{16} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{4(2k+1)^2-1} \operatorname{sen}\left((2k+1)\cdot \pi/2\right)$$

1 punto por obtener la serie

$$= \sum \frac{2k+1}{2^2(2k+1)^2-1} \cdot (-1)^k$$

0.2

$$= \frac{1}{2^2-1} - \frac{3}{6^2-1} + \frac{5}{10^2-1} - \frac{7}{14^2-1} + \cdots$$

0.5 pto justificar

Y justificar que $f(\pi/4) = \cos(\pi/4)$ coincide con la serie:

Esto es así, por teorema visto en clase, que requiere f continua en $\pi/4$

o, equivalentemente

$$\text{serie} = \frac{f\left(\frac{\pi}{4}^+\right) + f\left(\frac{\pi}{4}^-\right)}{2} = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$