

MA2002-05 Cálculo Avanzado y Aplicaciones**Profesor:** Rodrigo Lecaros L.**Auxiliar:** Diego Marchant D.- Manuel Suil J.**Auxiliar 12**

11 de Diciembre de 2015

1. Demuestre las siguientes propiedades de la Transformada de Fourier.

$$a) \widehat{f(ax)}(s) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$b) \widehat{f(x-b)}(s) = e^{-ibs} \hat{f}(s)$$

$$c) \widehat{f * g}(s) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(s) \cdot \hat{g}(s)$$

$$d) \widehat{\sqrt{2a}e^{-a(x-b)^2}}(s) = e^{-ibs} e^{-\frac{s^2}{4}}$$

En lo que sigue considere el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ x \mapsto u(x, t), \quad x \mapsto f(x) \in L^1 \text{ (integrables)} \end{cases}$$

2. Si \hat{u} es la transformada de Fourier de $u(\cdot, t)$ con respecto a la variable x (dejando t fijo), deduzca que

$$\hat{u}(s, t) = \hat{f}(s) e^{-(ks^2t - ist)}$$

3. Muestre que (suponga que la transformada de Fourier es inyectiva)

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(-\frac{(x-y+t)^2}{4kt}\right) dy$$