MA2002-6: Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Mauricio Soto.
Auxiliar: Felipe Salas.

Auxiliar 4

Resumen

Definición: (Integral de trabajo o de línea). Sea Γ una curva simple y regular, y sea $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo. Definimos la integral de trabajo (o integral de línea) de $\vec{F}$ sobre la curva $\Gamma \subseteq \Omega$ por

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} dt,$$

donde $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de Γ.

Teorema (de Stokes) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientable y regular por pedazos, cuyo borde ∂S es una curva cerrada, simple y regular por pedazos. Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 definido sobre un abierto U que incluye la superficie S y su borde ∂S.
Entonces

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA$$

Con $\hat{n}$ la normal obtenenida por la regla de la mano derecha, siguiendo la orientación de ∂S.

Problemas

P1. Sean $\vec{F}$ y $\vec{G}$ dos campos vectoriales dados por $\vec{F} = (xz - y)\hat{i} + (x^2y + z^3)\hat{j} + (3xz^2 - xy)\hat{k}$ y $\vec{G} = 2xe^{-y}\hat{i} + (cos(z) - x^2e^{-y})\hat{j} - ysin(z)\hat{k}$. Sea Γ la curva cerrada correspondiente al rectángulo de vértices $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 0, 1)$, $C = (2, 0, 1)$ y $D = (2, 0, 0)$ cuando es recorrido en el orden $ABCDA$.

a) Determine $\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ y justifique que $\vec{F}$ no es conservativo.

b) Demuestre que $\vec{G}$ es conservativo encontrando un potencial escalar ϕ tal que $\nabla\phi = -\vec{G}$. Luego calcule $\oint_\Gamma \vec{G} \cdot d\vec{r}$