MA2002-6 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Mauricio Soto
Auxiliar: Felipe Salas.

Auxiliar 8

1. Si $z = 2e^{i\theta}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$ demuestre que $\dfrac{1}{|z^2 - 1|} \leq \dfrac{1}{3}$. Interprete geométricamente este resultado.
   Ind: Recuerde que $|a - b| \geq |a| - |b|$.

2. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$ tal que
   - $\forall z, w \in \mathbb{C},\ f(z + w) = f(z)f(w)$.
   - $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^x$

   a) Demuestre que $f(z) = e^x f(iy)$.

   b) Para todo $y \in \mathbb{R}$, denote $u_0(y) = u(0, y)$ y $v_0(y) = v(0, y)$. Pruebe que u_0 y v_0 satisfacen el sistema de EDO siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{du_0}{dy} = -v_0 \\ \dfrac{dv_0}{dy} = u_0 \end{cases}$$

   c) Verifique que $u_0(0) = 1$ y que $v_0(0) = 0$, y resuelva el sistema de EDO de la pregunta anterior. Deduzca que $f(z) = e^z,\ \forall z \in \mathbb{C}$.

3. Sea $u(x, y) = sin(x)cosh(y)$. Encuentre $v(x, y)$ tal que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea holomorfa en $\mathbb{C}$.

4. Sea f una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$

   a) Demuestre que $f(z) = \alpha z + z_0$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ dados, son las únicas funciones holomorfas de la forma $f(z) = u(x) + iv(y)$, con $z = x + iy$.

   b) Demuestre que si f es un polinomio de grado k, entonces $|f(z)| \leq a + b|z|^k$ $\forall z \in \mathbb{C}$, para $a, b \in \mathbb{C}$.

   c) Suponga que $f(z)/z \to 0$ cuando $|z| \to +\infty$. Demuestre que existen $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $|f(z)| \leq a + b|z|$.