MA2002-6 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Mauricio Soto
Auxiliar: Felipe Salas.

Auxiliar 11

Teorema de los Resíduos.

Resumen

Teorema 1. *(Teorema de los residuos) Sea f una función meromorfa en un abierto Ω y sea P el conjunto de todos sus polos. Sea Γ un camino simple y cerrado, recorrido en sentido antihorario, tal que $\Gamma \cap P = \varnothing$. Entonces Γ encierra un número finito de polos de f, digamos $P \cap D = \{p_1, ..., p_n\}$ y más aún*

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(f, p_j)$$

Definición 1. *El residuo asociado a un polo p de orden m se calcula como:*

$$Res(f,p) = \lim_{z \to p} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-p)^m f(z) \right]$$

Problemas

1. Pruebe que:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

   donde $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a > |b|$.

2. Para $a > 1$ y $n \in \mathbb{N}$, evalúe las siguientes integrales:

$$C_n(a) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta}{a - \cos\theta} d\theta, \qquad S_n(a) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin n\theta}{a - \cos\theta} d\theta.$$

   Indicación: Considere $C_n(a) + iS_n(a)$.

3. Demuestre la siguiente identidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i x s}}{\cosh \pi x} dx = \frac{1}{\cosh \pi s}$$