MA2002-6 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Mauricio Soto
Auxiliar: Felipe Salas.

Auxiliar 13

Resumen

Definición 1. *Sea $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ una función integrable (ie $\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|dy<\infty$). Se define la transformada de Fourier de la función f como:*

$$\begin{aligned}\hat{f}:&\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ s\to \hat{f}(s) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx\end{aligned}$$

Problemas

1. Pruebe que la transformada de Fourier de $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ es $\hat{f}(s)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|s|}$ y encuentre la transformada de Fourier de $g(x)=\frac{x}{(1+x^2)^2}$.

2. *a*) Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ dos funciones integrables y continuas. Demuestre usando la transformada de Fourier, la siguiente identidad:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(s)\overline{\hat{g}(s)}ds.$$

   b) De lo anterior deduzca la identidad de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(s)|^2ds.$$

   c) Pruebe que si $\hat{f}(s)=0$ para todo s, entonces $f\equiv 0$.

3. Usando el método de separación de variables, resuelva la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\begin{aligned}u_{tt}+u_x-c^2u_{xx}&=0,\quad 0<x<l,\ t>0,\\ u(x,0)&=\phi(x),\quad 0\le x\le l,\\ u_t(x,0)&=\psi(x),\quad 0\le x\le l,\\ u(0,t)&=0,\quad t>0,\\ u(l,t)&=0,\quad t>0,\end{aligned}$$

   Donde ϕ y ψ son funciones dadas.