Pauta P3 Aux 13

$$\begin{cases} u_{tt} + u_x - c^2 u_{xx} = 0 & 0<x<l,\ t>0 \\ u(x,0) = \phi(x), & 0\leq x\leq l \\ u_t(x,0) = \varphi(x), & 0\leq x\leq l \\ u(0,t) = 0, & t>0 \\ u(l,t) = 0, & t>0 \end{cases}$$

El método de separación de variables supone que

$u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$, con X y T funciones <u>NO</u> nulas.

Reemplazando:

$$XT'' + X'T - c^2X''T = 0 \quad / \cdot \frac{1}{XT} \quad (\text{ojo que } XT\neq 0)$$

$$\Rightarrow \frac{T''}{T} + \frac{X'}{X} - c^2\frac{X''}{X} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{T''(t)}{T(t)} = -c^2\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{X'(x)}{X(x)}$$

Esta igualdad se cumple $\forall x\in(0,l),\ \forall t>0$

$$\Rightarrow -\frac{T''}{T} = -c^2\frac{X''}{X} + \frac{X'}{X} = \lambda$$

$\hookrightarrow$ constante

★ Al hacer esto el problema se separa en dos, por una parte la ecuación espacial y por otra la temporal.

Resolviendo para X:

1) $-\frac{c^2 X''}{X} + \frac{X'}{X} = \lambda \Rightarrow \begin{cases} c^2 X'' - X' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(\ell) = 0 \end{cases}$ Que es una edo.

$u(0,t) = 0$, $u(\ell,t) = 0 \Longrightarrow$

2) Proponemos una solución de la forma: $X(x) = e^{nx}$

$$\rightarrow (c^2 n^2 - n + \lambda)\underbrace{e^{nx}}_{= X(x) \neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow c^2 n^2 - n + \lambda = 0$$

$$\Rightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c^2\lambda}}{2c^2} \Rightarrow X(x) = Ae^{n_1 x} + Be^{n_2 x}$$

Con las condiciones iniciales:

- $X(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A$.

$$\Rightarrow X(x) = A(e^{n_1 x} - e^{n_2 x}).$$

- $X(\ell) = 0 \Rightarrow A(e^{n_1 \ell} - e^{n_2 \ell}) = 0$

$$\Rightarrow (e^{n_1 \ell} - e^{n_2 \ell}) = 0$$

Distinguiremos dos casos sobre n_1 y n_2

1) Si n_1 y n_2 son reales $\Rightarrow (e^{n_1 l} - e^{n_2 l}) = 0$

$$\Rightarrow n_1 = n_2 = n$$

$$\Rightarrow X(x) = A(\underbrace{e^{nx} - e^{nx}}_{\text{''}}) = 0$$

(X no debe ser la función nula) (pues $X(x) \not\equiv 0$)

2) n_1 y n_2 son complejos, y por tanto, conjugados.

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c^2\lambda}}{2c^2} = \underbrace{\frac{1}{2c^2}}_{a} \pm i \underbrace{\frac{\sqrt{4c^2\lambda - 1}}{2c^2}}_{b}$$

$$\Rightarrow n_1 = a + bi, \quad n_2 = a - bi$$

Luego $0 = (e^{n_1 l} - e^{n_2 l}) = (e^{al} \cdot e^{ibl} - e^{al} e^{-ibl})$

$$= e^{al}\underbrace{(e^{ibl} - e^{-ibl})}\ = 0$$

$$\Rightarrow e^{al} \cdot 2i \operatorname{sen}(bl) = 0$$

$$\Rightarrow bl = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\frac{\sqrt{4c^2\lambda - 1}}{2c^2} \cdot l = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si fijamos un k

$$\Rightarrow \lambda_k = \frac{c^2\pi^2k^2}{l} + \frac{1}{4c^2}, \quad k \in \mathbb{N}, \text{ ojo}$$

que $k = 0$ no sirve ya que da la solución nula

Luego $X(x) = A\left(e^{r_1 x} - e^{r_2 x}\right)$

$$= Ae^{ax}\left(e^{ibx} - e^{-ibx}\right)$$

$$= Ae^{ax}\,\text{sen}(bx) \quad , \quad a = \frac{1}{2c^2},\ b = \frac{\pi k}{\ell}$$

$$\Rightarrow X_k(x) = Ae^{\frac{x}{2c^2}} \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi k}{\ell} x\right), \quad k = 1, 2, \ldots$$

(Después veremos que la solución es una combinación de los X_k)

Para la parte temporal

$$\frac{-T''}{T} = \lambda \quad , \quad T'' = -\lambda T \quad , \quad y \quad \lambda > 0$$

★ Esta EDO se repite mucho, aprender solución!!

$$\Rightarrow T(t) = A\cos(\sqrt{\lambda}t) + B\,\text{sen}(\sqrt{\lambda}t),$$

si usamos $\omega_k = \sqrt{\lambda_k} = \sqrt{\frac{c^2\pi^2 k^2}{\ell^2} + \frac{1}{4c^2}}$

Luego $T_k = A_k \cos(\omega_k t) + B_k\,\text{sen}(\omega_k t)$

Luego nuestra solución u será una superposición de todas las soluciones

$$\Rightarrow u(x,t) = e^{\frac{x}{4c^2}} \sum_{k=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{\pi k x}{\ell}\right) \cdot \left(A_k \cos(\omega_k t) + B_k\,\text{sen}(\omega_k t)\right)$$

Ahora es momento de establecer las condiciones iniciales, pues falta determinar A_k y B_k

Evaluando en $t=0$:

$$u(x,0) = e^{\frac{x}{4c^2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sen}\left(\frac{\pi k x}{l}\right) = \phi(x)$$

$$\Rightarrow \phi(x) e^{\frac{-x}{4c^2}} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sen}\left(\frac{\pi k x}{l}\right)$$

Luego $\{A_k\}$ son los coeficientes de la serie de Fourier de la función $\phi(x) - e^{\frac{-x}{4c^2}}$, es decir

$$A_k = \frac{1}{l/2} \int_0^l \phi(x) \cdot e^{\frac{-x}{2c^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi k x}{l}\right) dx$$

Derivando c/r a t:

$$u_t(x,t) = e^{\frac{x}{4c^2}} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi k x}{l}\right) \left(B_k w_k \cos(w_k t) + -A_k w_k \operatorname{sen}(w_k t)\right)$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = e^{\frac{x}{4c^2}} \sum \operatorname{sen}\left(\frac{\pi k x}{l}\right) \cdot B_k w_k$$

$\Rightarrow \{B_k w_k\}$ es el coef. de la serie de Fourier de la función $\psi(x) e^{\frac{-x}{4c^2}}$

$$B_k = \frac{1}{w_k \cdot l/2} \int_0^l \psi(x) e^{\frac{-x}{4c^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi k x}{l}\right) dx$$

Con esto encontramos $u(x,t)$ la solución a la EDP.