MA2002-6 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Mauricio Soto
Auxiliar: Felipe Salas.

Auxiliar Extra Exámen

P1 Considere la siguiente EDP

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

donde ϕ es una función integrable en $\mathbb{R}$ y $c > 0$ una constante

a) Aplique transformada de Fourier en la variable x. Exprese la solución de la EDO que se obtiene en términos de exponenciales complejas, es decir, de la forma e^{iat}, con $a \in \mathbb{R}$.

b) Sea $f(x) = (\mathcal{F}^{-1}g)(x)$, $x \in \mathbb{R}$, la antitransformada de una función $g(s)$. Muestre que

$$f(x - x_0) = \mathcal{F}^{-1}[e^{isx_0} g(s)](x)$$

Deduzca de esto que

$$\mathcal{F}^{-1}[cos(sx_0)g(s)](x) = \frac{1}{2}[f(x - x_0) + f(x + x_0)].$$

c) Exprese la solución u de la EDP en términos de la función original ϕ.

P2 En lo que sigue, considere el problema:

$$\begin{cases} u_t - \kappa u_{xx} - u_x = 0 & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,t) \text{ y } f(x) & \text{son integrables para x} \end{cases}$$

a) Deduzca que

$$\hat{u}(s,t) = \hat{f}(s) e^{-(ks^2 t - ist)}.$$

b) Muestre, usando que la transformada de la función $\sqrt{2a}\ e^{-a(x-b)^2}$ es $e^{-ibs-\frac{s^2}{4a}}$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y+t)^2}{4\kappa t}} dy$$

P3 a) Verifique que

$$\vec{F}(\vec{r}) = (y^2cos(x) + z^3)\hat{\imath} + (2ysin(x) - 4)\hat{\jmath} + (3xz^2 + 2z)\hat{k}$$

es un campo conservativo y encuentre un potencial asociado

b) Calcule $\int_\Gamma \vec{G} \cdot d\vec{r}$ donde

$$\vec{G}(\vec{r}) = (y^2cos(x) + 2z^3)\hat{\imath} + (2ysin(x) - 4)\hat{\jmath} + (3xz^2 + 2z)\hat{k}$$

y Γ es la curva que parte del origen, pasa del arco $y = x^2$, $z = 0$ hasta el punto $(1, 1, 0)$ y sigue el segmento recto hasta el punto $(0, 0, 1)$.

c) Considere una superficie regular y orientable S con campo de normales $\vec{n}$, y $\vec{F},\ \vec{G}\ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dos campos vectoriales de clase C^1 tales que

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{G}(\vec{r}) \quad \forall \vec{r} \in S.$$

Muestre que

$$(rot\vec{F})(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r}) = (rot\vec{G})(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r}) \quad \forall \vec{r} \in S.$$

Mencione un ejemplo de $S, \vec{F}, \vec{G}$ que cumplan las condiciones anteriores pero

$$(rot\vec{F})(\vec{r}) \neq (rot\vec{G})(\vec{r}) \quad \forall \vec{r} \in S.$$