

PAUTA CONTROL 2

P1. a) Calculemos:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_0^x \frac{k}{\lambda} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(z/\lambda)^k} dz = -e^{-(z/\lambda)^k} \Big|_0^x = 1 - e^{-(x/\lambda)^k},$$

donde hemos usado que la derivada de $-e^{-(z/\lambda)^k}$ es exactamente el integrando. Lo anterior vale para $x \geq 0$, mientras que para $x < 0$ se tiene que $F_X(x) = 0$, lo cual hace aparecer la indicatriz buscada.

b) Utilizando la propiedad para calcular la esperanza de una función de una variable aleatoria, tenemos que:

$$M_{\ln(X)}(t) = \mathbb{E}(e^{t \ln(X)}) = \mathbb{E}(X^t) = \int_0^\infty x^t \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k} dx.$$

Hacemos el cambio de variable $y = (x/\lambda)^k$, con lo cual $dy = (k/\lambda) \cdot (x/\lambda)^{k-1} dx$, obteniendo

$$M_{\ln(X)}(t) = \int_0^\infty (\lambda y^{1/k})^t e^{-y} dy = \lambda^t \int_0^\infty y^{(1+t/k)-1} e^{-y} dy = \lambda^t \Gamma(1 + t/k).$$

c) Por lo hecho en el punto previo, sabemos que $M_{\ln(X)}(t) = \mathbb{E}(X^t)$. Por lo tanto para $n \in \mathbb{N}$, tenemos que el momento n -ésimo de X corresponde a $\mathbb{E}(X^n) = M_{\ln(X)}(n) = \lambda^n \Gamma(1 + n/k)$. La esperanza de X es entonces $\mathbb{E}(X) = \lambda \Gamma(1 + 1/k)$, y la varianza es

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda^2 \Gamma(1 + 2/k) - \lambda^2 \Gamma(1 + 1/k)^2 = \lambda^2 [\Gamma(1 + 2/k) - \Gamma(1 + 1/k)^2].$$

Encontremos una expresión para $M_X(t)$: expandiendo en serie de Taylor en torno a 0, y utilizando la propiedad fundamental de la función generadora de momentos, se obtiene:

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!} \frac{d^n M_X}{dt^n}(0) = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!} \mathbb{E}(X^n) = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n \lambda^n}{n!} \Gamma(1 + n/k).$$

d) Sea $Y = (X/\lambda)^k$. Calculemos su distribución acumulada:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}((X/\lambda)^k \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \lambda y^{1/k}) = F_X(\lambda y^{1/k}) = 1 - e^{-([\lambda y^{1/k}]/\lambda)^k} = 1 - e^{-y},$$

lo cual vale para $y \geq 0$. Derivando, obtenemos entonces $f_Y(y) = e^{-y} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(y)$, es decir, $(X/\lambda)^k$ es una variable exponencial de parámetro 1.

P2. a) Sea X la variable aleatoria que denota los puntos obtenidos, e Y la distancia de la flecha al centro del blanco. X es discreta, con $R_X = \{0, 3, 5, 10\}$, luego

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in R_X} k p_X(k) = 0 \cdot p_X(0) + 3 \cdot p_X(3) + 5 \cdot p_X(5) + 10 \cdot p_X(10).$$

La cantidad $p_X(10)$ corresponde a la probabilidad de que el puntaje sea 10, lo que equivale a la probabilidad de que la flecha esté a menos de 5cm del centro. Es decir, $p_X(10) = \mathbb{P}(Y \in$

$[0, 5] = 5/50$, donde hemos usado que $Y \sim \text{unif}(0, 50)$. Aplicando lo mismo para los otros posibles puntajes, se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 0 \cdot \mathbb{P}(Y \in [25, 50]) + 3 \cdot \mathbb{P}(Y \in [15, 25]) + 5 \cdot \mathbb{P}(Y \in [5, 15]) + 10 \cdot \mathbb{P}(Y \in [0, 5]) \\ &= 0 + 3 \cdot \frac{10}{50} + 5 \cdot \frac{10}{50} + 10 \cdot \frac{5}{50} = \frac{30 + 50 + 50}{50} = \frac{13}{5}.\end{aligned}$$

- b) Hay dos formas de resolver este problema. La primera consiste en calcular explícitamente la densidad de Z , utilizando el hecho que la densidad de la suma de variables independientes es la convolución de las densidades. Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned}f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{CTE} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{(z-x-\nu)^2}{2\tau^2}\right) dx \\ &= \text{CTE} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2} - \frac{(z-y-\mu-\nu)^2}{2\tau^2}\right) dy,\end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene haciendo el cambio de variable $y = x - \mu$ (CTE significa que no depende de z ni de la variable de integración). Trabajemos con el exponente que aparece en el integrando, apartando la dependencia en z :

$$\begin{aligned}\text{Exponente} &= -\frac{1}{2\sigma^2\tau^2}(\tau^2 y^2 + \sigma^2(z - (\mu + \nu) - y)^2) \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2\tau^2}((\sigma^2 + \tau^2)y^2 - 2y\sigma^2(z - (\mu + \nu)) + \sigma^2(z - (\mu + \nu))^2) \\ &= -\frac{\sigma^2 + \tau^2}{2\sigma^2\tau^2} \left[y^2 - \frac{2y\sigma^2(z - (\mu + \nu))}{\sigma^2 + \tau^2} \right] - \frac{(z - (\mu + \nu))^2}{2\tau^2} \\ &= -\frac{\sigma^2 + \tau^2}{2\sigma^2\tau^2} \left[\left(y - \frac{\sigma^2(z - (\mu + \nu))}{\sigma^2 + \tau^2} \right)^2 - \frac{\sigma^4(z - (\mu + \nu))^2}{(\sigma^2 + \tau^2)^2} \right] - \frac{(z - (\mu + \nu))^2}{2\tau^2} \\ &= -\frac{\sigma^2 + \tau^2}{2\sigma^2\tau^2} \left(y - \frac{\sigma^2(z - (\mu + \nu))}{\sigma^2 + \tau^2} \right)^2 + \frac{\sigma^2(z - (\mu + \nu))^2}{2\tau^2(\sigma^2 + \tau^2)} - \frac{(z - (\mu + \nu))^2}{2\tau^2} \\ &= -\frac{\sigma^2 + \tau^2}{2\sigma^2\tau^2} \left(y - \frac{\sigma^2(z - (\mu + \nu))}{\sigma^2 + \tau^2} \right)^2 - \frac{(z - (\mu + \nu))^2}{2(\sigma^2 + \tau^2)}.\end{aligned}$$

Luego:

$$f_Z(z) = \text{CTE} \exp\left(-\frac{(z - (\mu + \nu))^2}{2(\sigma^2 + \tau^2)}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-A(y - B)^2) dy,$$

donde A y B no dependen de la variable de integración. Haciendo un simple cambio de variable $w = y - B$, vemos que la integral no depende de B , lo que implica que no depende de z . Por lo tanto,

$$f_Z(z) = \text{CTE}' \exp\left(-\frac{(z - (\mu + \nu))^2}{2(\sigma^2 + \tau^2)}\right).$$

Lo anterior es la densidad de una $\mathcal{N}(\mu + \nu, \sigma^2 + \tau^2)$, salvo por la constante. Pero como sabemos que esa expresión debe ser una función densidad, la única opción es que la constante sea tal que lo anterior integre 1, luego necesariamente $\text{CTE}' = 1/\sqrt{2\pi(\sigma^2 + \tau^2)}$. Es decir, $Z \sim \mathcal{N}(\mu + \nu, \sigma^2 + \tau^2)$.

La segunda forma consiste en utilizar la función generadora de momentos y sus propiedades. Como X e Y son independientes, tenemos:

$$M_Z(t) = M_{X+Y}(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \cdot e^{\nu t + \frac{1}{2}\tau^2 t^2} = e^{(\mu+\nu)t + \frac{1}{2}(\sigma^2 + \tau^2)t^2}.$$

Es decir, M_Z coincide con la f.g.m. de una $\mathcal{N}(\mu + \nu, \sigma^2 + \tau^2)$. Pero como la f.g.m. caracteriza la distribución de la variable, necesariamente $Z \sim \mathcal{N}(\mu + \nu, \sigma^2 + \tau^2)$.

- P3.** a) 1) Sabemos que la cantidad de clientes que llegan en 2 minutos es una variable de Poisson de parámetro $\lambda = 3 \cdot 2 = 6$. Luego, la probabilidad buscada es:

$$\mathbb{P}(\text{Pois}(6) = 4) = e^{-6} \frac{6^4}{4!} = 54e^{-6}.$$

- 2) Sabemos que el tiempo promedio que tarda un cliente en ser atendido, lo cual corresponde a una variable $\exp(\lambda)$ para cierto λ , es de 2 minutos. Como el valor esperado de esta variable es $1/\lambda$, se tiene que $\lambda = 0,5$, es decir, cada caja atiende a tasa de 0,5 clientes por minuto. Por lo visto en clases, la suma de procesos de Poisson independientes es un nuevo proceso de Poisson, cuya tasa es la suma de las tasas. En nuestro caso, son 4 cajas, por lo cual la tasa de atención conjunta es $4\lambda = 2$ clientes por minuto.
- 3) Sea X la cantidad de clientes que llegan durante la falla del sistema, y sea S el tiempo que dura la falla. Condicionando en el resultado de S , tenemos:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(X|S=s) f_S(s) ds = \int_0^{\infty} \mathbb{E}(X|S=s) \cdot 0,2 \cdot e^{-0,2 \cdot s} ds.$$

Al condicionar en el evento $\{S=s\}$, la duración de la falla está fija. Luego, dado que la llegada de clientes es un proceso de Poisson con tasa 3, en el evento $\{S=s\}$ se tiene que $X \sim \text{Pois}(3s)$. Por lo tanto, $\mathbb{E}(X|S=s) = \mathbb{E}(\text{Pois}(3s)) = 3s$. Obtenemos entonces:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} 3s \cdot 0,2 \cdot e^{-0,2 \cdot s} ds = \frac{3}{0,2} \int_0^{\infty} 0,2 \cdot (0,2 \cdot s) \cdot e^{-0,2 \cdot s} ds = \frac{3}{0,2} = 15,$$

donde hemos usado que la integral vale 1 pues el integrando es la densidad de una variable gamma de parámetros $\lambda = 0,2$ y $\theta = 2$.

- b) 1) Se tiene que $(U, V) = g(X, Y)$, donde g es la función $g(x, y) = (xy, x/y)$. Notemos que

$$(\sqrt{UV}, \sqrt{U/V}) = (\sqrt{XY \cdot (X/Y)}, \sqrt{XY/(X/Y)}) = (X, Y),$$

es decir, $g^{-1}(u, v) = (\sqrt{uv}, \sqrt{u/v})$. Luego, el jacobiano de g^{-1} viene dado por:

$$Jg^{-1}(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{d\sqrt{uv}}{du} & \frac{d\sqrt{uv}}{dv} \\ \frac{d\sqrt{u/v}}{du} & \frac{d\sqrt{u/v}}{dv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v}{2\sqrt{uv}} & \frac{u}{2\sqrt{uv}} \\ \frac{1/v}{2\sqrt{u/v}} & \frac{-u/v^2}{2\sqrt{u/v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \\ \frac{1}{2\sqrt{uv}} & \frac{-\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto:

$$|\det Jg^{-1}(u, v)| = \left| \frac{-1}{4v} - \frac{1}{4v} \right| = \frac{1}{2v}.$$

Por el método del jacobiano, tenemos entonces que:

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(g^{-1}(u, v)) \cdot |\det Jg^{-1}(u, v)| = \frac{1}{\sqrt{uv}^2 \sqrt{u/v}^2} \cdot \frac{1}{2v} = \frac{1}{2u^2 v},$$

lo cual vale cuando $\sqrt{uv} \geq 1$ y $\sqrt{u/v} \geq 1$, es decir, cuando $v \geq 1/u$ y $u \geq v$ (con $u, v > 0$). Obtenemos entonces:

$$f_{U,V}(u, v) = \begin{cases} \frac{1}{2u^2v}, & 0 < 1/u \leq v \leq u \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- 2) Calculemos la marginal de U . Se tiene que el intervalo $[1/u, u]$ es no vacío si y sólo si $u \geq 1$. Luego, para $u < 1$ se tiene que $f_U(u)$ vale 0, mientras que para $u \geq 1$ obtenemos:

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u, v) dv = \int_{1/u}^u \frac{dv}{2u^2v} = \frac{1}{2u^2} [\ln(u) - \ln(1/u)] = \frac{\ln(u)}{u^2}.$$

Veamos V : la condición $1/u \leq v \leq u$ equivale a $u \geq 1/v$ y $u \geq v$, es decir, $u \geq \max(v, 1/v)$. Para $v > 0$, tenemos entonces

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u, v) du = \int_{\max(v, 1/v)}^{\infty} \frac{du}{2u^2v} = \frac{1}{2v} \frac{1}{\max(v, 1/v)}.$$

En resumen:

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{\ln(u)}{u^2}, & u \geq 1 \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{2v^2}, & v \geq 1 \\ \frac{1}{2}, & 0 < v < 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$