Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-3 Probabilidades y Estadística
Primavera 2015

Roberto Cortez
Roberto Bobadilla
Dafne Pincheira

Pauta Control 2

P1. *a)* (3,0 ptos.) Una persona dispara con arco y flecha a un blanco. Si la flecha llega a menos de 5cm del centro, se asignan 10 puntos; si está a más de 5cm y a menos de 15cm, se le asignan 5 puntos; y si está a más de 15cm y menos de 25cm, se le asignan 3 puntos. En otro caso, no se asignan puntos. Calcule la cantidad esperada de puntos que obtiene la persona, si se sabe que la distancia de la flecha al centro del blanco se distribuye uniformemente entre 0cm y 50cm.

Solución. Sea X la variable aleatoria que denota los puntos obtenidos, e Y la distancia de la flecha al centro del blanco. X es discreta, con $R_X = \{0, 3, 5, 10\}$, luego

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in R_X} k p_X(k) = 0 \cdot p_X(0) + 3 \cdot p_X(3) + 5 \cdot p_X(5) + 10 \cdot p_X(10).$$

La cantidad $p_X(10)$ corresponde a la probabilidad de que el puntaje sea 10, lo que equivale a la probabilidad de que la flecha esté a menos de 5cm del centro. Es decir, $p_X(10) = \mathbb{P}(Y \in [0, 5]) = 5/50$, donde hemos usado que $Y \sim \text{unif}(0, 50)$. Aplicando lo mismo para los otros posibles puntajes, se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 0 \cdot \mathbb{P}(Y \in [25, 50]) + 3 \cdot \mathbb{P}(Y \in [15, 25]) + 5 \cdot \mathbb{P}(Y \in [5, 15]) + 10 \cdot \mathbb{P}(Y \in [0, 5]) \\ &= 0 + 3 \cdot \frac{10}{50} + 5 \cdot \frac{10}{50} + 10 \cdot \frac{5}{50} = \frac{30 + 50 + 50}{50} = \frac{13}{5}.\end{aligned}$$

b) (3,0 ptos.) Sean X, Y variables aleatorias con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2(x + y) & 0 < x < 1, 0 < y < x \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule las densidades marginales de X e Y. ¿Son independientes? Explique. *Indicación:* dibuje la región en que la densidad conjunta es estrictamente positiva.

Solución. Calculemos la marginal de X. Para $x \in (0, 1)$, tenemos:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \int_0^x 2(x + y) dy = 2x^2 + x^2 = 3x^2,$$

mientras que para $x \notin (0, 1)$ se tiene $f_{X,Y}(x, y) = 0, \forall y$, y entonces $f_X(x) = 0$. Obtenemos entonces que $f_X(x) = 3x^2 \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$. Calculemos la marginal de Y para $y \in (0, 1)$:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx = \int_y^1 2(x + y) dx = (1 - y^2) + 2y(1 - y) = 1 + 2y - 3y^2.$$

Nuevamente, para $y \notin (0, 1)$ la marginal vale 0, con lo cual obtenemos que $f_Y(y) = [1 + 2y - 3y^2]\mathbb{1}_{(0,1)}(y)$. Notemos que X e Y no son independientes, pues el producto de sus densidades marginales es $3x^2[1 + 2y - 3y^2]$ para $x, y \in (0, 1)$, lo cual no coincide con la densidad conjunta.

P2. *a*) (2,0 ptos.) En una urna hay n bolitas, de las cuales r son rojas y $b = n - r$ son blancas. Se extraen k bolitas al azar sin reposición. Calcule la cantidad esperada de bolitas rojas extraídas. *Indicación:* defina una variable indicatriz adecuada por cada bolita roja y utilice la linealidad de la esperanza.

Solución. Numeremos las r bolitas rojas desde 1 a r, y para $i \in \{1, \dots, r\}$ definimos

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la bolita } i \text{ resultó extraída,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Claramente $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$, donde p es la probabilidad de que se extraiga la bolita i, es decir,

$$p = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{k}{n}.$$

Luego, $\mathbb{E}(X_i) = p = k/n$ para todo i. Si X denota la cantidad de bolitas rojas extraídas, es claro que $X = X_1 + \cdots + X_r$, y por linealidad de la esperanza obtenemos

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_r) = \frac{rk}{n}.$$

b) (2,0 ptos.) Sea $X \sim \exp(\lambda)$. Calcule todos los momentos de X.

Solución. Usaremos la propiedad fundamental de la f.g.m. (también puede hacerse calculando integrales). Sabemos que la f.g.m. de X es $M_X(t) = \lambda/(\lambda - t)$. Derivemos sucesivamente:

$$\begin{aligned} M_X'(t) &= \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2}, \\ M_X''(t) &= \frac{2\lambda(\lambda - t)}{(\lambda - t)^4} = \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3}, \\ M_X'''(t) &= \frac{2 \cdot 3\lambda(\lambda - t)^2}{(\lambda - t)^6} = \frac{2 \cdot 3\lambda}{(\lambda - t)^4}, \\ &\vdots \\ M_X^{(k)}(t) &= \frac{k!\lambda}{(\lambda - t)^{k+1}}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se deduce fácilmente por inducción. Evaluando en $t = 0$, obtenemos para todo $k = 0, 1, \dots$

$$\mathbb{E}(X^k) = M_X^{(k)}(0) = \frac{k!}{\lambda^k}.$$

c) (2,0 ptos.) La cantidad de clientes preferenciales que llegan a un banco en 1 hora es una variable Poisson(λ), mientras que la cantidad de clientes regulares es una variable Poisson(μ). Asumiendo independencia, muestre que la cantidad total de clientes que llegan al banco en 1 hora es una variable Poisson($\lambda + \mu$).

Solución. Usaremos la f.g.m. y sus propiedades (también puede resoverse usando probabilidades totales). Sean X e Y las cantidades de clientes preferenciales y regulares que llegan al banco, respectivamente. Como $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ e $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$, sabemos que

$M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$ y $M_Y(t) = e^{\mu(e^t-1)}$. Como X e Y son independientes, obtenemos

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t) = e^{\lambda(e^t-1)}e^{\mu(e^t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(e^t-1)},$$

la cual es la f.g.m. de una variable Poisson$(\lambda+\mu)$. Como la f.g.m. caracteriza la distribución de una variable, necesariamente $X + Y \sim$ Poisson$(\lambda + \mu)$.

P3. Decimos que una variable aleatoria W tiene distribución *beta* de parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, anotado $W \sim$ Beta(α, β), si su densidad es

$$f_W(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x),$$

donde Γ es la función gamma.

a) (1,5 ptos.) Calcule $\mathbb{E}(W)$ y var(W). *Indicación:* no calcule las integrales involucradas; en cambio, utilice el hecho que la densidad de una variable beta de parámetros adecuados debe integrar 1. Use también que $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ para todo $t > 0$.

Solución. Notemos que $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$, pues f_W debe integrar 1. Usando esto pero para $\alpha+1$ en lugar de α, tenemos:

$$\mathbb{E}(W) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 x x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+1+\beta)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta},$$

donde en el último paso hemos usado la propiedad $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ para $t = \alpha$ y $t = \alpha+\beta$. Usando un argumento similar, tenemos que $\mathbb{E}(W^2)$ es igual a

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 x^2 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+2+\beta)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}.$$

Con esto:

$$\text{var}(W) = \mathbb{E}(W^2) - \mathbb{E}(W)^2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

b) (1,5 ptos.) Si $Z \sim$ Beta$(\alpha, 1)$, calcule la distribución de Z^α.

Solución. Sea $Y = Z^\alpha$. Para $y \in (0,1)$, calculemos $F_Y(y)$:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Z^\alpha \le y) = \mathbb{P}(Z \le y^{1/\alpha}) = C\int_0^{y^{1/\alpha}} z^{\alpha-1}dz = C\alpha(y^{1/\alpha})^\alpha = C\alpha y.$$

Derivando, esto implica que $f_Y(y) = C\alpha\mathbb{1}_{(0,1)}(y)$, es decir, f_Y es una constante sobre el intervalo $(0,1)$ y nula fuera de él. Esto significa que $Y \sim$ unif$(0,1)$.

c) (1,5 ptos.) Sean $X_1, \dots, X_n$ independientes con distribución unif$(0,1)$, y sea $Z = \text{mín}(X_1, \dots, X_n)$. Muestre que $Z \sim$ Beta$(1, n)$. *Indicación:* $\text{mín}(x_1, \dots, x_n) > z$ si y sólo si $x_i > z$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Solución. Veamos:

$$\mathbb{P}(Z > z) = \mathbb{P}(\text{mín}(X_1, \dots, X_n) > z) = \mathbb{P}(X_1 > z, \dots, X_n > z) = \mathbb{P}(X_1 > z)\cdots\mathbb{P}(X_n > z),$$

donde en el último paso hemos usado la independencia de los X_i. Como $X_i \sim \text{unif}(0,1)$, se tiene que $\mathbb{P}(X_i > z) = 1 - z$ para $z \in (0,1)$, obteniendo:

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = 1 - \mathbb{P}(Z > z) = 1 - (1-z)^n.$$

Derivando, se deduce que $f_Z(z) = n(1-z)^{n-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(z)$ (es directo que $f_Z(z) = 0$ para $z \notin (0,1)$, lo cual explica la indicatriz). Como la densidad de una variable $\text{Beta}(1,n)$ es una constante por $x^0(1-x)^{n-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$, esto quiere decir que $Z \sim \text{Beta}(1,n)$ (la constante n que aparece en $f_Z(z)$ debe ser la indicada para que f_Z integre 1).

d) (1,5 ptos.) Sean $X \sim \text{gamma}(\alpha,\lambda)$ e $Y \sim \text{gamma}(\beta,\lambda)$ independientes, y sea $U = X/(X+Y)$. Pruebe que $U \sim \text{Beta}(\alpha,\beta)$. *Indicación:* defina $V = X + Y$ y utilice el método del jacobiano.

Solución. Siguiendo la indicación, es claro que $(X,Y) = g^{-1}(U,V)$, donde $g^{-1}(u,v) = (uv, v(1-u))$ para $u \in (0,1)$ y $v > 0$. Luego,

$$\det Jg^{-1}(u,v) = \det \begin{bmatrix} v & u \\ -v & 1-u \end{bmatrix} = v(1-u) + vu = v.$$

Notar también que $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, por independencia. Con esto, para $(x,y) = g^{-1}(u,v) = (uv, v(1-u))$, usando el método del jacobiano y la fórmula de la densidad de una variable gamma, tenemos

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(x,y)|\det Jg^{-1}(u,v)| &= \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\lambda e^{-\lambda y}(\lambda y)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \cdot v \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda uv}(\lambda uv)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\lambda e^{-\lambda v(1-u)}(\lambda v(1-u))^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \cdot v \\ &= C\left(u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\right)\left(v^{\alpha+\beta-1}e^{-\lambda v}\right), \end{aligned}$$

donde C es una cierta constante (no depende de u y v). Notemos que lo anterior es un producto de una parte que depende de u y otra de v, lo cual significa que U y V son independientes, y que $f_U(u) = \tilde{C}u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(u)$, para cierta constante $\tilde{C}$ (para $u \notin (0,1)$ es directo ver que $f_U(u) = 0$, lo cual explica la indicatriz). Pero como f_U debe integrar 1, necesariamente $\tilde{C}$ es la constante adecuada, es decir, debe cumplirse que $\tilde{C} = \Gamma(\alpha+\beta)/[\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)]$, probando que $U \sim \text{Beta}(\alpha,\beta)$.