Guía ejercicios 3

1. La cantidad de llamadas telefónicas recibidas en una empresa durante t horas es una variable Poisson(μt). Se produce una falla en el sistema telefónico, durante la cual las llamadas recibidas no pueden ser atendidas. La duración de la falla es una variable exponencial de parámetro λ. Sea X la cantidad de llamadas no atendidas durante la falla.

a) Utilizando esperanzas condicionales, calcule $\mathbb{E}(X)$.

b) Para $k = 0, 1, \ldots$, calcule $\mathbb{P}(X = k)$. Concluya que $X + 1$ es una variable geométrica de parámetro $p = \lambda/(\lambda + \mu)$. Obtenga nuevamente $\mathbb{E}(X)$. *Indicación:* utilice la regla de probabilidades totales; para calcular la integral, construya la densidad de una variable gamma adecuada.

2. Se lanza n veces de manera independiente una moneda con probabilidad p de cara, donde p es el resultado de la realización de otra variable aleatoria U con distribución unif$(0, 1)$, independiente de los lanzamientos. Sea X la cantidad de caras que se obtienen. Demuestre que para todo $i = 0, \ldots, n$ se tiene que $p_X(i) = \frac{1}{n+1}$. *Indicación:* utilizando una propiedad conocida, calcule $\mathbb{P}(X = i)$ condicionando en los posibles resultados de U; utilice sin demostrar el hecho que

$$\int_0^1 p^i(1-p)^{n-i}dp = \frac{i!(n-i)!}{(n+1)!}.$$

3. En una fiesta de año nuevo a la que usted asiste, se lanza al aire una gran cantidad de diminutos papeles blancos y rojos. Los papeles blancos provienen de un contenedor esférico, y los papeles rojos de una caja cúbica, de manera que el diámetro del contenedor esférico es igual a la arista de la caja (ambos poseen igual cantidad de papeles por cm^3). Al llegar a su casa usted se percata que adheridos a su ropa hay b papeles blancos y r papeles rojos. Argumente por qué $6b/r$ es una buena aproximación de π; explicite sus supuestos.

4. Se dispone de un piso de "parquet" con líneas paralelas a distancia $a > 0$. Se lanza una aguja de largo $l < a$ en el piso, de manera tal que la distancia X del centro de la aguja a la línea más cercana es una variable uniforme en $[0, a/2]$, y el ángulo Θ que forma la aguja con el eje perpendicular a las líneas es uniforme en $[-\pi/2, \pi/2]$, independiente de X.

a) Muestre que la aguja queda por sobre una línea si y sólo si $X \le (l/2)\cos\Theta$.

b) Muestre que la probabilidad de que la aguja quede por sobre una línea es $2l/(\pi a)$.

c) Con los elementos descritos, diseñe un procedimiento para aproximar π.

5. Se sabe que el valor esperado del puntaje que obtiene un alumno en el examen final de un ramo es de 75.

a) Dé una cota superior de la probabilidad que el puntaje sea mayor que 85.

b) Suponga de aquí en adelante que se sabe que la varianza es 25. ¿Qué puede decirse sobre la probabilidad de que el puntaje obtenido por el alumno esté entre 65 y 85?

c) ¿Cuántos alumnos tienen que dar el examen para asegurar que, con probabilidad de al menos un 99 %, el promedio de notas esté entre 70 y 80? Obtenga un resultado sin utilizar el teorema central del límite, y otro utilizándolo.

6. Un panel solar está conformado por n celdas fotovoltaicas estándar. La energía total que almacena el panel durante 1 hora es $T = \sum_{i=1}^n X_i$, donde $X_1, \ldots, X_n$ representan las energías capturadas por cada celda, las cuales modelamos como variables i.i.d. positivas con media $\mu = 8$ [Wh]. Se desea obtener la cantidad mínima de celdas n^* tal que el panel almacene $E = 112$ [Wh] o más, con probabilidad de al menos $1 - \alpha$, con $\alpha = 2{,}28\,\%$.

a) Sin aproximar con el TCL, encuentre una cota para la probabilidad de que el panel almacene la energía deseada. Obtenga una condición *necesaria* para el valor de n^*.

b) Suponga de aquí en adelante que $\sigma^2 = 4$ es la varianza de cada X_i. Utilizando el TCL, encuentre un valor aproximado para n^*.

c) Sale al mercado un nuevo tipo de celda que en 1 hora captura $\nu = 14$ [Wh] en esperanza, con varianza $\tau^2 = 16$. Usted propone diseñar un nuevo panel compuesto por m de estas celdas, cuyas energías producidas en 1 hora modelamos como variables i.i.d. $Y_1, \ldots, Y_m$, independientes de los X_i. Utilizando el TCL, calcule el mínimo m^* tal que, con probabilidad $1 - \alpha$, la energía total capturada $S = \sum_{i=1}^{m^*} Y_i$ sea al menos un 50 % mayor que la producida por un panel con la misma cantidad de celdas estándar.

7. Sea X variable aleatoria binomial con parámetros n y p.

a) Sean $\hat{p}_1 = X/n$ y $\hat{p}_2 = (X+1)/(n+2)$ estimadores de p. Calcule ECM($\hat{p}_1$) y ECM($\hat{p}_2$). ¿Para qué valores de p es mejor $\hat{p}_2$ de acuerdo al criterio del error cuadrático medio?

b) Sea $\hat{\sigma}^2 = X(1 - X/n)$ un estimador de $\sigma^2 = \text{var}(X)$. Muestre que $\hat{\sigma}^2$ es sesgado y modifíquelo para obtener un estimador insesgado de σ^2.

8. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. con distribución común Poisson(λ). Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de λ, calcule su esperanza y varianza, y muestre que este estimador es consistente.

9. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. proveniente de una Gamma(θ, λ), donde $\theta > 1$ es conocido.

a) Muestre que los estimadores de λ del método de los momentos y el de máxima verosimilitud coinciden con $\hat{\lambda} = \theta/\overline{X}$.

b) Concluya que $\hat{\lambda}$ converge casi seguramente a λ cuando el tamaño de la muestra crece indefinidamente.

c) Muestre que la esperanza de $\hat{\lambda}$ es $\lambda n\theta/(n\theta - 1)$ y modifíquelo para obtener un estimador insesgado $\tilde{\lambda}$. Suponiendo $\theta > 2$, calcule la varianza de $\tilde{\lambda}$ y muestre que es un estimador consistente. *Indicación:* utilice el hecho que $\sum_{i=1}^n X_i$ tiene distribución Gamma$(n\theta, \lambda)$.

10. Considere una m.a.s. $X_1, \ldots, X_n$ proveniente de una distribución Gamma(θ, λ), con ambos parámetros desconocidos.

a) Definimos $Y_i = \log(X_i)$. Sean $\hat{\theta}_{\mathrm{mv}}$ y $\hat{\lambda}_{\mathrm{mv}}$ los estimadores de máxima verosimilitud de θ y λ, respectivamente. Muestre que ellos satisfacen las ecuaciones

$$\frac{\Gamma'(\hat{\theta}_{\mathrm{mv}})}{\Gamma(\hat{\theta}_{\mathrm{mv}})} - \log(\hat{\theta}_{\mathrm{mv}}) = \overline{Y} - \log \overline{X} \quad \text{y} \quad \hat{\lambda}_{\mathrm{mv}} = \frac{\hat{\theta}_{\mathrm{mv}}}{\overline{X}}.$$

b) Denotemos m_k al k-ésimo momento muestral, es decir, $m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k$. Muestre que los estimadores de los momentos de θ y λ corresponden a

$$\hat{\theta}_{\mathrm{mom}} = \frac{m_1^2}{m_2 - m_1^2} \quad \text{y} \quad \hat{\lambda}_{\mathrm{mom}} = \frac{m_1}{m_2 - m_1^2}.$$

c) Argumente por qué m_1 y m_2 convergen casi seguramente a θ/λ y $\theta(1+\theta)/\lambda^2$ cuando $n \to \infty$, respectivamente. Concluya que $\hat{\theta}_{\mathrm{mom}}$ y $\hat{\lambda}_{\mathrm{mom}}$ convergen casi seguramente a θ y λ cuando $n \to \infty$, respectivamente.

11. Sea X variable aleatoria con densidad $f_X(x) = Cx^{r-1}\mathbb{1}_{[0,b]}(x)$, donde $C > 0$, $b > 0$ y $r > 0$ son constantes. Se sabe que $\mathbb{E}(X) = r/(r+1)$.

a) Muestre que $C = r$ y $b = 1$.

b) Dado $t > 0$, calcule $\mathbb{E}(X^t)$. Obtenga la varianza de X.

c) Muestre que $-\ln(X)$ tiene distribución exponencial de parámetro r.

d) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple proveniente de la distribución de X. Muestre que el estimador de máxima verosimilitud de r es $\hat{r} = -n/\sum_{i=1}^n \ln(X_i)$.

e) Muestre que $\hat{r} \to r$ casi seguramente cuando $n \to \infty$.

12. El promedio de los puntajes obtenidos por 16 personas en una prueba es de 540, y la desviación estándar (i.e., la raíz del estimador insesgado de la varianza) es de 50. Asumiendo que el puntaje tiene distribución normal, construya un intervalo de confianza al 95 % para la esperanza μ.

13. Se desea estudiar la variabilidad de la temperatura mínima diaria (en grados Celsius) durante la primera semana de invierno. Se obtuvieron los datos descritos en la siguiente tabla:

L	M	M	J	V	S	D
5,0	2,4	−1,0	2,6	4,0	−2,0	3,0

Suponiendo que los datos conforman una m.a.s. proveniente de una normal, obtenga un intervalo de confianza para la varianza σ^2 al nivel 90 %.

14. En un laboratorio se desea estudiar la variabilidad de las mediciones tomadas en un complejo experimento. Se tomaron 6 mediciones:

$$9{,}54 \quad 9{,}61 \quad 9{,}32 \quad 9{,}48 \quad 9{,}70 \quad 9{,}26.$$

Suponiendo que ellas provienen de una distribución normal, obtenga un intervalo de confianza de la varianza σ^2 al nivel 90 %.

15. La duración de unas determinadas baterías es una variable aleatoria $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con parámetros desconocidos. Se prueban 16 baterías, obteniendo una duración promedio de 7,0 y con s^2 igual a 0,9.

a) Encontrar un intervalo de confianza al 95 % para μ.

b) Encontrar un intervalo de confianza al 95 % para σ^2.

c) Suponga que se sabe que la varianza real es $\sigma^2 = 1$. ¿Cuál es el intervalo de confianza para μ en este caso?

d) Si se desea reducir un 20 % el largo del intervalo anterior, manteniendo el nivel de confianza, ¿cuántas baterías adicionales se deberían probar?

16. Se lanza una moneda 25 veces, obteniendo la siguiente secuencia:

$$SSCCCSCCSSCSSCCSCCSCSSSCC.$$

Aproximando con el TCL, obtenga un intervalo de confianza para la probabilidad de cara p al 90 %.

17. Considere una variable aleatoria X con densidad dada por $f_X(x) = Cxe^{-x/\theta}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$, donde C y θ son constantes.

a) Muestre que $C = 1/\theta^2$.

b) Muestre que $\mathbb{E}(X) = 2\theta$.

c) Muestre que $\mathrm{var}(X) = 2\theta^2$.

d) Considere una muestra aleatoria simple $X_1, \ldots, X_n$ proveniente de X. Calcule el estimador de máxima verosimilitud de θ, y muestre que es insesgado.

e) Suponga que el valor del estimador máximo verosímil $\hat{\theta}$ obtenido en una muestra de tamaño $n = 50$ es de 10,0. Obtenga un intervalo de confianza para θ al nivel 5 %. *Indicación:* aproxime utilizando el hecho que la cantidad $(\bar{X} - 2\theta)/(\hat{\theta}\sqrt{2/n})$ converge en distribución a una normal estándar cuando $n \to \infty$ (no demuestre esta afirmación).

18. Un productor afirma que al menos el 20 % del público prefiere su producto. Se toma una muestra de 100 personas para verificar su afirmación. Con $\alpha = 0{,}05$, ¿cuál es la mínima cantidad de personas que prefieren el producto de manera que no haya suficiente evidencia para rechazar la afirmación del productor? Si solo 10 personas prefieren el producto, ¿cuál es el p-valor del test?

19. Se afirma que el 2 % de los conductores olvida su licencia de conducir. Se toma una muestra de 100 conductores, y se observa que todos andan trayendo su licencia.

a) ¿Cuál es el p-valor del test que contrasta la afirmación con la hipótesis de que menos del 2 % de los conductores olvidan su licencia?

b) Para $\alpha = 2{,}28\,\%$, ¿cuál es la máxima cantidad de conductores adicionales que traen su licencia tal que la afirmación no se rechaza?