MA4703 Control Óptimo: Teoría y Laboratorio. Semestre 2015-2
Profesores: Héctor Ramírez C. **Auxiliar:** Emilio Molina F. **Ayudante:** Martín Castillo & Pablo Koch

Control 2

P3. *Soluciones de viscosidad*

a) *(Cambio de variables de Kruzkov)* Sean $l : \Omega \to \mathbb{R}$ una función suficientemente regular y $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto no vacío. Demuestre que u es una solución de viscosidad de $\|Du(x)\| - l(x) = 0$ si y sólo si $v(x) = -e^{-u(x)}$ es solución de viscosidad de

$$\|Dv(x)\| + l(x)v(x) = 0.$$

b) Muestre que, para cada $t \in [0,1]$, la función

$$v_t(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & -1 \leq x < -t \\ x^2 - 1 + 2(1 - t^2), & |x| \leq t \\ 1 - x^2, & t < x \leq 1 \end{cases}$$

es una solución de viscosidad de la ecuación

$$|v'(x)| - 2|x| = 0, \quad x \in (-1, 1)$$

con condiciones de Dirichlet $v_t(-1) = v_t(1) = 0$.

Solución:

a) Observemos primero que, para $\varphi \in C^1(\Omega)$, x es mínimo/máximo local de $u - \varphi$ si y sólo si x es mínimo/máximo local de $v - \psi$, donde $\psi(x) := -e^{-\varphi(x)}$. **0.5 pts.** Además se tiene $D\psi(x) = e^{-\varphi(x)} D\varphi(x)$, de donde se obtiene que

$$\|D\psi(x)\| + l(x)\psi(x) = e^{-\varphi(x)}(\|D\varphi(x)\| - l(x)). \tag{1}$$

0.5 pts.

$\Rightarrow$) Supongamos que $v = -e^{-u(x)}$ es solución de viscosidad de $\|Dv(x)\| + l(x)v(x) = 0$. Sean $\varphi \in C^1(\Omega)$ y x mínimo (máximo resp.) local de $u - \varphi$ que satisface $\varphi(x) = u(x)$. Gracias a la primera observación, a (1) y al hecho que $\psi(x) = v(x)$ obtenemos que

$$\|D\varphi(x)\| - l(x) = e^{\varphi(x)}(\|D\psi(x)\| + l(x)v(x)) \geq 0 \ (\leq 0, \text{ respectivamente}),$$

concluyendo que u es super- (sub-, resp.) solución de viscosidad de $\|Du(x)\| - l(x) = 0$. Obtenemos lo deseado. **0.5 pts.**

$\Leftarrow$) Supongamos que u es solución de viscosidad de $\|Du(x)\| - l(x) = 0$. Sean $v(x) = -e^{-u(x)}$, $\psi \in C^1(\Omega)$ (en principio arbitraria!) y x mínimo (máximo resp.) local de $v - \psi$ que satisface $\psi(x) = v(x)$.

Notemos que como $v(x) < 0$ y sólo nos interesa analizar lo que pasa alrededor de x, podemos trabajar en una vecindad de x donde $\psi(x) < 0$. Por lo tanto, podemos suponer que $\psi(x) := -e^{-\varphi(x)}$ para cierta función $\varphi \in C^1(\Omega)$, lo que permite usar nuestra primera observación y (1), además del hecho que $\varphi(x) = u(x)$. **0.5 pts.** Obtenemos entonces que

$$\|D\psi(x)\| + l(x)\psi(x) = e^{-\varphi(x)}(\|D\varphi(x)\| - l(x)) \geq 0 \ (\leq 0, \text{ respectivamente}),$$

es decir, v es super- (sub-, resp.) solución de viscosidad de $\|Dv(x)\| + l(x)v(x) = 0$. Concluimos lo deseado. **0.5 pts.**

Se le suma 0.5 pts. si todos los detalles están correctamente justificados.

b) Notemos que v_t es claramente continua ($v_t(\pm t) = 1 - t^2$ lo cual coincide con $\lim_{x \to \pm t} v_t(x)$) y satisface las condiciones de Dirichlet $v_t(-1) = v_t(1) = 0$. Además, v_t es diferenciable en todo $(-1, 1)$, salvo en $\pm t$, y su derivada viene dada por

$$v_t'(x) = \begin{cases} -2x, & -1 \leq x < -t \\ 2x, & |x| < t \\ -2x, & t < x \leq 1 \end{cases}.$$

0.5 pts.

Sea $\varphi \in C^1(-1,1)$ tal que t es máximo local de $v_t - \varphi$. Para $x > t$ suficientemente cerca de t se tiene

$$\varphi(x) - \varphi(t) \geq v_t(x) - v_t(t) = (1 - x^2) - (1 - t^2) = t^2 - x^2.$$

Dividiendo por $x - t(> 0)$ y haciendo $x \to t$ obtenemos que $\varphi'(t) \geq -2t$. **0.5 pts.**
Similarmente, para $x < t$ suficientemente cerca de t se tiene

$$\varphi(x) - \varphi(t) \geq v_t(x) - v_t(t) = x^2 - 1 + 2(1 - t^2) - (1 - t^2) = x^2 - t^2.$$

Dividiendo por $x - t(< 0)$ y haciendo $x \to t$ obtenemos que $\varphi'(t) \leq 2t$. **0.5 pts.** Deducimos que

$$|\varphi'(t)| - 2t \leq 0,$$

concluyendo que v_t es una sub-solución de viscosidad de $|v'(x)| - 2|x| = 0$. **0.5 pts.**

Notemos ahora que si $\varphi \in C^1(-1,1)$ es tal que t es mínimo local de $v_t - \varphi$ entonces, para $x > t$ suficientemente cerca de t, obtenemos los mismos resultados anteriores pero con la desigualdad inversa, es decir, intercambiando $\geq$ por $\leq$ y viceversa. Obtenemos entonces que v_t es una super-solución de viscosidad de $|v'(x)| - 2|x| = 0$ y, por lo tanto, solución de viscosidad. **0.5 pts.**

Finalmente, el análisis en $-t$ es casi idéntico. En efecto, sólo se intercambian los argumentos de los casos $x > -t$ y $x < -t$, y se divide por $x+t$ en lugar de $x-t$, obteniendo que $\varphi'(t) \geq -2t$ y $\varphi'(t) \leq 2t$ (respectivamente), es decir, $|\varphi'(t)| - 2t \leq 0$ en caso que $-t$ sea máximo local de $v_t - \varphi$. De la misma forma se muestra que $|\varphi'(t)| - 2t \geq 0$ en caso que $-t$ sea mínimo local de $v_t - \varphi$. Concluimos entonces que v_t es solución de viscosidad de $|v'(x)| - 2|x| = 0$. **0.5 pts.**