MA1001-2 Introducción al Cálculo
Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliar: Felipe Salas.

Auxiliar 10

Resumen:

- **Definición de convergencia**: $x_n \to l \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ tal que $|x_n - l| < \varepsilon$.

- **Propiedades útiles**:

 1. Álgebra de sucesiones.
 2. **Teorema del sandwich**:
 Sean (u_n),(v_n) y (w_n) sucesiones tales que (u_n) y (w_n) convergen a $l \in \mathbb{R}$ y además existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(\forall n \geq n_0)$ $u_n \leq v_n \leq w_n$, entonces (v_n) converge a l.
 3. **Teorema de sucesiones monótonas**:
    - Si (s_n) es una sucesión creciente (a partir de un $n_0 \in \mathbb{N}$) y acotada superiormente, entonces es convergente.
    - Si (s_n) es una sucesión decreciente (a partir de un $n_0 \in \mathbb{N}$) y acotada inferiormente, entonces es convergente.
 4. **Límites conocidos**:
    - $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.
    - Si $\lim q_n = q$, entonces $\lim (q_n)^n = \begin{cases} 0, & \text{si } |q| < 1. \\ 1, & \text{si } q = 1. \\ \text{diverge}, & \text{si } |q| > 1. \end{cases}$
    Nota: note que en particular funciona cuando $q_n = q$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.
    - Si $\lim a_n = a > 0$, entonces $\lim (a_n)^{\frac{1}{n}} = 1$.
    Nota: note que en particular funciona cuando $a_n = a$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.
    - $\lim \sqrt[n]{n^k} = 1$, $(\forall k \in \mathbb{N})$.
    - Si $|q| < 1$ y $k \in \mathbb{N}$, $\lim n^k q^n = 0$.

(**P**1) Sea (x_n) una sucesión convergente a $l \in \mathbb{R}$, y sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente.

(a) Pruebe que la sucesión $(x_{f(n)})$ es convergente a l.

(b) Calcule $\lim \left(\dfrac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{n^2}$

(**P**2) Considere la sucesión definida mediante la recurrencia:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2}(1 + a_{n-1}^2), \text{ con } a_0, a_1 \in (0,1)$$

(I) Demuestre que $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2)\ a_n \in (0,1)$

(II) Muestre que (a_n) es convergente.

(III) Calcule el límite.

(**P**3) Sean (u_n) una sucesión creciente y (v_n) una sucesión decreciente tales que $\lim(u_n - v_n) = 0$. Pruebe que (u_n) y (v_n) convergen y tienen el mismo límite.

(**P**4) Calcular cuando existan los siguientes límites:

(I) $\lim \left(\dfrac{3n-1}{2n+4}\right)^n$.

(II) $\lim \sqrt[n]{\dfrac{2^n+1}{n^2 3^{n+1}}}$.

(III) $\lim \sqrt[n]{n^3 + 100n^2 + 3}$

(IV) $\lim \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}$

(V) $\lim \sqrt[n]{a^n + b^n},\ a, b > 0$

(VI) $\lim \dfrac{a^n + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}},\ a \neq b$