MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Maya Stein
Auxiliar: Juan Pedro Ross
Fecha: 24 de Marzo del 2016

Auxiliar 2: Conjuntos

Resumen:

I. **Definiciones básicas:**

- $[(\exists x)(x \in \emptyset)] \Leftrightarrow F$.
- $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$.
- $A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.
- $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$.
- $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$.
- $A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$.
- $A \Delta B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B). \vee (x \in B \wedge x \notin A)$.

II. Algunas **propiedades de conjuntos**:

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
- $(A^c)^c = A$.
- $A \setminus B = A \cap B^c$.
- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$.
- $(A \cap B) \subseteq A \subseteq (A \cup B)$.
- $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (B^c \subseteq A^c)$.

III. **Conjunto potencia:** Dado A un conjunto $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de A.

$$X \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow X \subseteq A$$

(**P**1) Sea A un subconjunto fijo del conjunto universo U. Probar que $\forall X, Y \subseteq U$ se tiene que:

$$(X \cup A = Y \cup A) \wedge (X \cap A = Y \cap A) \Rightarrow X = Y$$

(**P**2) Sean A, B, C y D subconjuntos de un universo U. Probar que:

(a) $A \subseteq C \Rightarrow A \setminus B = C \setminus [B \cup (C \setminus A)]$

(b) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$

(c) $(A \Delta B = C \Rightarrow B = A \Delta C)$

(**P**3) Sea U un conjunto no vacío y $A \subseteq U$. Pruebe que si

$$(\forall X, Y \in \mathcal{P}(U))(A \cup X = A \cup Y \Rightarrow X = Y), \text{ entonces } A = \phi.$$

(**P**4) Sean A, B, C y D subconjuntos de un universo U. Probar que:

- $A \cup B \in \mathcal{P}(C \cap D) \Rightarrow A \in \mathcal{P}(C) \wedge B \in \mathcal{P}(C)$
- $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$

(**P**5) Explicite el siguiente conjunto H=$\{x \in \mathbb{R} : x^2 = x\}$
Determine ahora $\mathcal{P}(H)$ ¿Es cierto que $\mathcal{P}(H) = \{y \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : (\forall z \in y)\ z^2 = z\}$

(**P**6) Demuestre que $(\exists y)(p(y) \Rightarrow (\forall x)p(x)$ es una tautología para toda proposición p.

(**P**7) Demuestre sin usar tabla de verdad que $((p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)) \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)]$