4. Semana 3

P1 Para f

- Inyectiva: $(\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}\backslash\{0\})(f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2)$ en efecto, sean n_1, n_2 arbitrarios $f(n_1) = f(n_2) \Leftrightarrow \frac{1}{2n_1} = \frac{1}{2n_2} \Leftrightarrow n_1 = n_2$.
- Sobreyectiva: $(\forall y \in \mathbb{Q})(\exists n \in \mathbb{N}\backslash\{0\})(f(n) = y)$, notemos que esto no es cierto, si, por ejemplo, tomamos $y = 20$ (claramente es racional), deberiamos tomar un $n = \frac{1}{40}$ de esta manera $f(n) = \frac{1}{\frac{2}{40}} = 20 = y$, sin embargo, $\frac{1}{40} \notin \mathbb{N}$, luego no es sobreyectiva.

Para g

- Inyectiva: $(\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q})(g(q_1) = g(q_2) \Rightarrow q_1 = q_2)$ en efecto, sean q_1, q_2 arbitrarios $g(q_1) = g(q_2) \Leftrightarrow \frac{q_1}{2} = \frac{q_2}{2} \Leftrightarrow q_1 = q_2$.
- Sobreyectiva: $(\forall y \in \mathbb{Q})(\exists q \in \mathbb{Q})(g(q) = y)$, en efecto, basta tomar $q = 2y$, con esto se tiene que $g(q) = g(2y) = \frac{2y}{2} = y$.

Con esto se concluye que solamente g es biyectiva.

Nota: Por lo general, no siempre se entiende la sobreyectividad en un principio, recordemos que existen 2 conjuntos en las funciones (de partida y de llegada), la sobreyectividad nos pide que, para CUALQUIER elemento del conjunto de llegada, debemos encontrar un elemento en la partida, tal que al evaluarlo en la función, nos dé como resultado ese elemento cualquiera de la llegada, veamos el siguiente ejemplo para demostrar epiyectividad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \to f(x) = 3x + 8$ *por ejemplo, si queremos obtener el valor 8 como resultado en el conjunto imagen (de llegada), ¿Cuál elemento tomamos en el conjunto de partida? Debemos tomar el* $x = 0$ *ya que* $f(0) = 3 \cdot 0 + 8 = 8$, *para 9, tomamos* $x = \frac{1}{3}$ *ya que* $f(\frac{1}{3}) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 8 = 9$ *y así... Pero en sobreyectividad, se requiere encontrar un elemento en el conjunto de partida, dado un* y *CUALQUIERA del conjunto de llegada, (de ahí el cuantificador* $\forall y$ *) entonces, ¿Cuál elemento hay que tomar?, lo que se hace es despejar la función, así como sacar la inversa, aún cuando no se haya demostrado que la posea, eso fue lo que se hizo implícitamente para los dos ejemplos anteriores, se resolvieron las ecuaciones* $8 = 3x + 8$ *y* $9 = 3x + 8$ *donde nos dio los resultados 0 y* $\frac{1}{3}$ *respectivamente. Entonces para un* y *cualquiera se resuelve la siguiente ecuación* $y = 3x + 8$ *lo que nos da como resultado* $x = \frac{y-8}{3}$ *con esto* $f(x) = f\left(\frac{y-8}{3}\right) = 3 \cdot \frac{y-8}{3} + 8 = y$ *con esto vimos que encontramos para un elemento cualquiera del conjunto de llegada, otro elemento del conjunto de partida que nos permite llegar a dicho valor arbitrario, con lo que se demuestra sobreyectividad.*

P2 **(a)** Si se despeja x en función de $f(x) = y$ la expresión queda

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x+1}{x-2} \\ yx - 2y &= 2x + 1 \\ yx - 2x &= 2y + 1 \\ x &= \frac{2y+1}{y-2} \end{aligned}$$

Se observa entonces que el conjunto imagen (los y) pueden tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$ excepto el 2 ya que en ese caso no está definido el x que tomar.

(b) $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\backslash\{2\})(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$ en efecto, sean x_1, x_2 arbitrarios $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-2} = \frac{2x_2+1}{x_2-2} \Leftrightarrow (2x_1+1)(x_2-2) = (2x_2+1)(x_1-2) \Leftrightarrow 2x_1x_2 - 4x_1 + x_2 - 2 = 2x_1x_2 - 4x_2 + x_1 - 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

(c) Notemos que el dominio no cambia y además $f(x) = g(x)$, luego de la parte (b) se tiene la inyectividad, falta solamente demostrar la epiyectividad.

- Epiyectiva: $(\forall y \in \mathbb{R}\backslash\{2\})(\exists x \in \mathbb{R}\backslash\{2\})(f(x) = y)$ en efecto, dado el despeje realizado de la parte (a), sea un y cualquiera real distinto de 2, bastaría tomar $x = \frac{2y+1}{y-2}$. Con esto se tiene que $f(x) = \frac{2\frac{2y+1}{y-2}+1}{\frac{2y+1}{y-2}-2} = y$. Una vez demostrado que la inversa existe el cálculo de ésta es despejar x en función de y, luego se intercambian y por x. (En realidad esto último no es tan necesario porque las variables son arbitrarias).

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x+1}{x-2} \\ yx - 2y &= 2x + 1 \\ yx - 2x &= 2y + 1 \\ x &= \frac{2y+1}{y-2} \\ y &= \frac{2x+1}{x-2} \quad \text{cambio de } x \text{ por } y \\ f^{-1}(x) &= \frac{2x+1}{x-2} \end{aligned}$$

P3 Lo difícil del problema es entenderlo, la resolución es sumamente sencilla, lo primero se define un conjunto $L_{a,b}$ que contiene todos los puntos en el plano tales que a es pendiente y b es coeficiente de posición (en el fondo ese conjunto L es una recta) y luego un conjunto $\mathcal{L}$ que contiene estas rectas, por ejemplo $L_{2,1}, L_{5,3}$. El conjunto $\mathcal{H}$ son pares ordenados de rectas, tales que dicho par debe intersectarse y no pueden ser las mismas rectas. La función lo que hace es sacar un par ordenado de $\mathcal{H}$ y entregarnos otro par ordenado (pero de números reales), que corresponde al punto de intersección de las rectas. Se pide demostrar que es sobreyectivo, es decir, encontrar para cualquier par ordenado (x_0, y_0) pares de rectas (L_1, L_2)

tales que al intersectarlas nos entregue como resultado (x_0, y_0), como se habrán percatado, existen infinitos pares de rectas que hacen esto, y como nos piden al menos un par, tomemos el mas simple $L_1 = x_0$ y $L_2 = y_0$ (recta vertical y horizontal), con esto se concluye lo pedido.

P4 **(a)**

$$\begin{aligned} f(f(X)) &= A \cap (B \cup [A \cap (B \cup X)]) \\ &= A \cap ((B \cup A) \cap (B \cup B \cup X)) \\ &= A \cap (B \cup A) \cap (B \cup X) \\ &= A \cap (B \cup X) \end{aligned}$$

Recordemos que $[A \cap (B \cup A)] \subseteq A$ pero también $A \cap (B \cup A) \Leftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap A) \Leftrightarrow (A \cap B) \cup A$, luego $A \subseteq [(A \cap B) \cup A]$, juntando ambas expresiones se tiene que $[A \cap (B \cup A)] = A$.

(b) Si no es inyectiva entonces $(\exists X_1, X_2 \in P(U))(f(X_1) = f(X_2) \wedge X_1 \neq X_2)$, Se analizarán 3 casos:

- Tanto $A \neq U$ como $B \neq \emptyset$ se cumplen, para eso tomemos $X_1 = U$ y $X_2 = B^c$, se tiene que $f(X_1) = A \cap (B \cup U) = A$ y $f(X_2) = A \cap (B \cup B^c) = A$, luego encontramos X_1 y X_2 tales que $f(X_1) = f(X_2)$ y además $X_1 \neq X_2$, por lo tanto, no es inyectivo.
- Se cumple $A \neq U$ pero $B \neq \emptyset$ no, es decir, $B = \emptyset$ para eso tomemos $X_1 = \emptyset$ y $X_2 = A^c$, se tiene que $f(X_1) = A \cap (\emptyset \cup \emptyset) = \emptyset$ y $f(X_2) = A \cap (\emptyset \cup A^c) = \emptyset$, luego no es inyectivo.
- Se cumple $B \neq \emptyset$ pero $A \neq U$ no, es decir, $A = U$, para esto basta tomar los mismos conjuntos que en el primer caso.

(c) Si no es sobreyectiva entonces $(\exists Y \in P(U))(\forall X \in P(U))(f(X) \neq Y)$, notemos que para $Y = U$, como $A \neq U$ es imposible encontrar un X tal que $f(X) = U$, ya que A necesariamente es más chico que U, sin importar con que conjunto $(B \cup X)$ se intersecte, el resultado no podrá llegar a valer U.

P5 **(a)** Como x siempre pertenece a E se tiene que $\delta_E(x) = 1$, como x nunca pertenece a $\emptyset$ se tiene que $\delta_\emptyset(x) = 0$.

(b) Tenemos 4 casos:

- $\delta_A(x) = 1$ y $\delta_B(x) = 1$, es decir $x \in A$ y $x \in B$, con lo cual $x \in A \cap B$, $\delta_A(x)\delta_B(x) = \delta_{A\cap B}(x) = 1$.
- $\delta_A(x) = 1$ y $\delta_B(x) = 0$, es decir $x \in A$ y $x \notin B$, con lo cual $x \notin A \cap B$, $\delta_A(x)\delta_B(x) = \delta_{A\cap B}(x) = 0$.
- $\delta_A(x) = 0$ y $\delta_B(x) = 1$, es decir $x \notin A$ y $x \in B$, con lo cual $x \notin A \cap B$, $\delta_A(x)\delta_B(x) = \delta_{A\cap B}(x) = 0$.
- $\delta_A(x) = 0$ y $\delta_B(x) = 0$, es decir $x \notin A$ y $x \notin B$, con lo cual $x \notin A \cap B$, $\delta_A(x)\delta_B(x) = \delta_{A\cap B}(x) = 0$.

Se concluye que $\delta_A(x)\delta_B(x) = \delta_{A\cap B}(x)$.

(c) $\Rightarrow$ Si $x \in C, \delta_C(x) = 1$, pero como $C \subseteq D \Rightarrow x \in D, \delta_D(x) = 1$. Si $x \notin C, \delta_C(x) = 0$, luego $\delta_D(x) = 0$ o 1, en cualquier caso se tiene que $\delta_C(x) \leq \delta_D(x)$.

$\Leftarrow$ Tomando $x \in C, \delta_C(x) = 1$ debido a que $\delta_C(x) \leq \delta_D(x)$,$\delta_D(x) = 1 \Rightarrow x \in D$.