MA1101-3 Introducción al Álgebra.
Profesor: Pablo Dartnell R.
Auxiliar: Felipe Atenas M.

Resumen Control 2

A continuación se presenta un resumen de los contenidos del control 2 del curso Introducción al Álgebra. Ojo que es un resumen, por lo que puede no contener todo lo necesario para el control, pero sí lo esencial. Mi consejo es que ustedes mismos elaboren su propio resumen, porque son ustedes mismos los que saben qué cosas manejan bien y las que no manejan tan bien. Consideraremos que f y g son funciones.

Funciones

1. Función: Llamamos función de A en B a cualquier $f \subseteq A \times B$ tal que $(\forall x \in \text{Dom} f)(\exists! y \in \text{Rec} f)\ (x, y) \in f$

2. Igualdad de funciones:

$$f = g \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Dom} f & = \text{Dom} g \\ \text{Rec} f & = \text{Rec} g \\ (\forall x \in \text{Dom} f) & f(x) = g(x) \end{cases}$$

3. Inyectividad: $(\forall x_1, x_2 \in \text{Dom} f)\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
   Ojo que a veces puede ser útil usar la contrarrecíproca.

4. Sobreyectividad: $(\forall y \in \text{Rec} f)(\exists x \in \text{Dom} f)\ y = f(x)$

5. Biyectividad: Inyectividad y Sobreyectividad, ie, $(\forall y \in \text{Rec} f)(\exists! x \in \text{Dom} f)\ y = f(x)$

6. Función Inversa: $(\forall x \in \text{Dom} f)(\forall y \in \text{Rec} f)\ f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

7. Propiedad Importante: f es biyectiva $\Leftrightarrow$ f^{-1} es función.

8. Si f es biyectiva, entonces: $(\forall x \in \text{Dom} f)\ f^{-1}(f(x)) = x$, $(\forall y \in \text{Rec} f)\ f(f^{-1}(y)) = y$ y f^{-1} es biyectiva, con $(f^{-1})^{-1} = f$

9. Composición de funciones: $(\forall x \in \text{Dom} f)\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$ $[\text{Rec} f \subseteq \text{Dom} g]$

10. Propiedades Importantes: Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, entonces:
    - Asociatividad: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (Ojo con el orden de la composición).
    - $id_B \circ f = f \circ id_A = f$ (identidad es neutro)
    - Si f es biyectiva, entonces: $f \circ f^{-1} = id_B$, $f^{-1} \circ f = id_A$
    - Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
    - Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
    - Si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva.
    - Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.
    - Si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

11. Sea $f : A \to B$ biyectiva y $g : B \to A$. Entonces se tiene que:
    - $g \circ f = id_A \Rightarrow g = f^{-1}$
    - $f \circ g = id_B \Rightarrow g = f^{-1}$

    Ojo acá, que más que recordar la propiedad (que es importante también), entiendan bien la demostración que se hace en el apunte, en la página 45.

12. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to A$. Si $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$, entonces $g = f^{-1}$.
13. Inversa de una composición: Si f y g son biyectivas, entonces $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
    Ojo acá con el orden. Recuerden que "se da vuelta".
14. Conjunto imagen: Sea $f : A \to B$ y $A' \subseteq A$, con A' y A conjuntos. Se define el conjunto imagen del conjunto A' por f como:

$$f(A') = \{b \in \mathrm{Rec}f \ : (\exists a \in A')\ f(a) = b\}$$

    Notar que $f(A') \subseteq B$
15. Sean $f : A \to B, \quad A_1, A_2 \subseteq A$. Se tienen las siguientes propiedades:
    - f es sobreyectiva $\Leftrightarrow f(A) = B$ (conjunto imagen igual al recorrido).
    - $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow f(A_1) \subseteq f(A_2)$
    - $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$ (ojo que es una inclusión).
    - $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
16. Conjunto preimagen: Sea $f : A \to B$ y $B' \subseteq B$, con B' y B conjuntos. Se define el conjunto preimagen del conjunto B' por f como:

$$f^{-1}(B') = \{a \in \mathrm{Dom}f \ : f(a) \in B'\}$$

    Notar que $f^{-1}(B') \subseteq A$
17. Sean $f : A \to B, \quad B_1, B_2 \subseteq B$. Se tienen la siguientes propiedades:
    - $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$
    - $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
    - $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
18. Propiedades Importantes: Sean A', A, B', B conjuntos, $f : A \to B$.
    - $A' \subseteq A \Rightarrow A' \subseteq f^{-1}(f(A'))$ (Ojo es una inclusión).
    - f es inyectiva $\Leftrightarrow (\forall A' \subseteq A)\ A' = f^{-1}(f(A'))$
    - $B' \subseteq B \Rightarrow f(f^{-1}(B')) \subseteq B'$ (Ojo es una inclusión).
    - f es sobreyectiva $\Leftrightarrow (\forall B' \subseteq B)\ f(f^{-1}(B')) = B'$

Cualquier comentario o consulta a felipe.e.atenas@gmail.com
Éxito en el estudio!