

PAUTA Aux C2

P1] forma 1]  $f$  biyectiva  $\Leftrightarrow f$  sob e iny.

PDQ:  $f$  sob, sea  $y \in P(U)$

$\exists x \in P(U)$  t<sub>q</sub>  $f(x) = x^c = y$  ?

se les ocurre alguna que al tomarle  
complemento de  $y \dots$  mmm... sí!  $x = y^c$

OJO! este es nuestro postulante, hay  
que revisar que cumpla

Es claro que  $y^c \in P(U)$

$$f(y^c) = (y^c)^c = y //$$

$\Rightarrow f$  sobreyectiva.

PDQ]  $f$  inyectiva.

$$\boxed{f(x) = f(y)} \Leftrightarrow x^c = y^c / ( )^c$$

$$\Leftrightarrow (x^c)^c = (y^c)^c$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = y}$$

∴  $f$  inyectiva

$\Rightarrow$  Sob + iny.  $\Leftrightarrow$  biyectiva.

||

## forma 2

$f$  biyectiva  $\Leftrightarrow \exists f^{-1}$  t.q.  $f^{-1}(f(x)) = x$

es decir queremos  $f^{-1}$  t.q.

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

¿Se les ocurre alguien?

Si tomando  $f^{-1}: \mathbb{P}(U) \rightarrow \mathbb{P}(U)$

$$x \rightarrow f^{-1}(x) = x^c$$

es decir  $f^{-1} = f$  (caso muy particular)

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^c) = (x^c)^c = x$$

$$\circ \circ \exists f^{-1}$$

$\circ \circ f$  biyectiva.

P2] hoga  $f$  iny; fohog iny; gofoh sob

$$\Rightarrow \boxed{f \text{ iny.}}_{f \circ (1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{g \text{ iny}} \Rightarrow \boxed{g \text{ sob.}}$$

$$g \text{ biy} \Leftrightarrow \exists g^{-1} !$$

y ahora que sabemos que  $\exists g^{-1}$

$$g^{-1} \circ (g \circ f \circ h) = (g^{-1} \circ g) \circ f \circ h$$

$= \text{Id}_B \circ f \circ h = f \circ h$  que es  
la composición de  $g^{-1}$  con  $g \circ f \circ h$

ambas sobreyectivas

$\Rightarrow f \circ h$  es sobreyectiva

$\Rightarrow$   $f$  es sobreyectiva

esto + (1)  $\Rightarrow f$  biyectiva  $\Rightarrow \exists f^{-1}$

$$f^{-1} \circ (f \circ h) = (f^{-1} \circ f) \circ h$$

$= Id_A \circ h = h$  que por ser una comp. de sobreyectivas es

sobreyectiva  $\Rightarrow$   $h$  es sobreyectiva.

con un argumento similar

$$(h \circ g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})$$

$$= h \circ g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1}$$

$$= h \circ g \circ Id_B \circ g^{-1}$$

$$= h \circ g \circ g^{-1}$$

$$= h \circ Id_C$$

$$= h$$

$\Rightarrow$   $h$  inyectiva

$\Rightarrow h$  biyectiva //

$$P3/a) \Psi(f, g) = (f \circ g)^{-1}$$

que es una composición de biyectivas de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (pues  $f, g \in \mathcal{F}$ )

$\Rightarrow (f \circ g)^{-1}$  es biyectiva de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\Rightarrow \Psi(f, g) \in \mathcal{F}$

b) Sea  $h \in \mathcal{F} \Rightarrow h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  biyectiva

¿Existen dos funciones biyectivas de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que al componerlas y luego sacarle inversa den  $h$ ?

Bueno  $h$  biyectiva  $\Leftrightarrow \exists h^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
mmm... si yo compusiese  $h^{-1}$  con algo biyectivo de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que no le haga nada al sacarle inversa daría  $h$

$$\begin{aligned} \text{¿ } Id_{\mathbb{R}}! &\rightarrow \Psi(h^{-1}, Id_{\mathbb{R}}) \\ &= (h^{-1} \circ Id_{\mathbb{R}})^{-1} \\ &= (h^{-1})^{-1} \\ &= h // \end{aligned}$$

$\Rightarrow \Psi$  sobreyectiva //

obs: demostrar que  $(f \circ g)^{-1}$  es no iny. es lo mismo que  $f \circ g$  no iny pues la inversa es única.

Tomando  $h = 2x + 1$

¿Se te ocurren dos formas distintas de componer  $h$ ?

Si forma 1  $f = 2x + 1$ ;  $g = x$

(Que es la misma construcción usada recién)

Y forma 2  $\tilde{f} = x + 1$   $\tilde{g} = 2x$

así  $(f \circ g)(x)$ ;  $(\tilde{f} \circ \tilde{g})(x)$

$$= f(x) \quad ; \quad = \tilde{f}(2x)$$

$$= 2x + 1 \quad = 2x + 1$$

$$\therefore (f, g) \neq (\tilde{f}, \tilde{g}) \not\Rightarrow \Psi(f, g) = \Psi(\tilde{f}, \tilde{g})$$

$\therefore$  No inyectiva.

d) primero de terminemos explícitamente

$$A \times A = \{(f, f), (f, g), (g, f), (g, g)\}$$

$$\begin{aligned} \Psi(f, f) &= (f(2x+3))^{-1} = (2(2x+3) + 3)^{-1} \\ &= (4x + 6 + 3)^{-1} = (4x + 9)^{-1} = h^{-1} \end{aligned}$$

Para sacar la inversa.

$$h \circ h^{-1}(x) = x$$

$$h(h^{-1}(x)) = 4h^{-1}(x) + 9 = x$$

$$\Rightarrow \boxed{h^{-1}(x) = \frac{x-9}{4}} //$$

$$\psi(f, g) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{-1} = \left(2\left(\frac{x}{2}\right) + 3\right)^{-1} = (x+3)^{-1}$$

$$\psi(g, f) = \left(g(2x+3)\right)^{-1} = \left(\frac{2x+3}{2}\right)^{-1} = x - 3 \quad //$$
$$x - \frac{3}{2} \quad //$$

$$\psi(g, g) = g\left(\frac{x}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{\frac{x}{2}}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{x}{4}\right)^{-1} = 4x \quad //$$

P4 | ( estrictamente creciente =  $\nearrow$  )

a) POQ:  $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

si  $x_1 \neq x_2$ ,  $x_1 < x_2$  o  $x_2 < x_1$

caso 1 |  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$  (pues  $f \nearrow$ )

y como  $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

el otro caso es análogo

$\therefore f \nearrow \Rightarrow f$  inyectiva.

b) No basta tomar  $f(x) = 2x$

$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 = f(x_1) < f(x_2)$

$\therefore f$  es  $\nearrow$  pero  $f^{-1}(\{3\})$

ALGÚN NATURAL  $\mathbb{N}$   $f(x) = 2x = 3$

NO  $\therefore f$  no sobreyectiva.

c) Notemos que como  $f \nearrow$  y sobreyectiva  $f(0) = 0$  pues si no fuese 0

y fuese 8 (por dar un ejemplo)

como  $f$  es creciente todas las otras imágenes deben ser mayores a 8

y  $\{0, 1, \dots, 7\}$  NO TENDRÍA PREIMAGEN

$\Rightarrow f$  no sobreyectiva.

de la misma forma  $f(1) = 1, f(2) = 2 \dots$  etc

es decir  $f$  debe ser la identidad //