

MA1101-7 Introducción al Álgebra

Profesor: Maya Stein.

Auxiliar: Juan Pedro Ross.

Fecha: Martes 12 de Abril.



Auxiliar 5: Relaciones

Resumen: Sea $\mathcal{R}$ una relación en A , entonces

- $\mathcal{R}$ es **refleja** ssi $(\forall x \in A) x\mathcal{R}x$.
- $\mathcal{R}$ es **simétrica** ssi $(\forall x, y \in A) x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
- $\mathcal{R}$ es **antisimétrica** ssi $(\forall x, y \in A) (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.
- $\mathcal{R}$ es **transitiva** ssi $(\forall x, y, z \in A) (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.
- $\mathcal{R}$ es relación de **orden** ssi es refleja, antisimétrica y transitiva.
- $\mathcal{R}$ es relación de **equivalencia** ssi es refleja, simétrica y transitiva.
- Si $\mathcal{R}$ es una relación de orden, diremos que es un **orden total** si para cada $x, y \in A$ $(x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x)$. De lo contrario, se dirá que es un **orden parcial**.
- Si $\mathcal{R}$ es de equivalencia y $x \in A$ $[x]_{\mathcal{R}} = \{y \in A \mid x\mathcal{R}y\}$ es la **clase de equivalencia** de x asociada a $\mathcal{R}$.
- $A/\mathcal{R}$ es el conjunto de las clases de equivalencia inducidas por $\mathcal{R}$ y se le llama **conjunto cociente**.

P1. Sea $\mathcal{R}$ una relación definida de $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ por $(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$. Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y determine $[(0, 2)]_{\mathcal{R}}$, es decir, la clase de equivalencia de $(0, 2) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\})$.

P2. Sean E_1, E_2 dos conjuntos no vacíos y $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ relaciones de orden definidas en E_1 y E_2 respectivamente.

- Demuestre que $\mathcal{R}$ definida en $E_1 \times E_2$ por $(x, y)\mathcal{R}(u, v) \Leftrightarrow [x\mathcal{R}_1u \wedge y\mathcal{R}_2v]$ es una relación de orden en $E_1 \times E_2$.
- Si tanto E_1 como E_2 tienen al menos dos elementos cada uno, pruebe que $\mathcal{R}$ es sólo una relación de orden parcial.

P3. (a) Se define en $\mathbb{R}$ la relación Ψ dada por: $x\Psi y \Leftrightarrow (y - x) \in \mathbb{N}$.

- Demuestre que Ψ es una relación de orden.
- Indique si es una relación de orden parcial o total. Justifique.

(b) Considere ahora la relación Φ definida en $\mathbb{R}$ como $x\Phi y \Leftrightarrow (y - x) \in \mathbb{Z}$.

- Demuestre que Φ es una relación de equivalencia.
- Dado $p \in \mathbb{Z}$, calcule la clase de equivalencia $[p]_{\Phi}$.

P4. Sea E un conjunto no vacío y considere $K \in \mathcal{P}(E)$ fijo, con $K \neq \emptyset$. Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación $\mathcal{R}_K$ por

$$A\mathcal{R}_KB \Leftrightarrow B \cap K \subseteq A.$$

- Pruebe que $\mathcal{R}_K$ es refleja y transitiva.
- Proponga un conjunto $K \in \mathcal{P}(E)$ de modo que $\mathcal{R}_K$ sea una relación de orden. Justifique.